T 24765

ANUL 2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XI.

—

ANUL 1931—1932.

BIBLIOTECA ASTRA
SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMANEASCA"
1932

1950

90.

MAY 2014

I 24765

ANUL XI. 15 MARTIE 1931 NO. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 VIRGIL CLAUDEAN SISTEME DE ECUATIUNI SI IDENTITATI ALGEBRICE
2. NOTE MATEMATICE: 1
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 592, 778, 820, 941
5. PROBLEME PROPUSE: 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988
6. INFORMATIUNI

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

2459.

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească"

Rugăm a ni se trimete de urgență costul abonamentului pentru „R. M. T." pe anul XI.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adreate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei.

Revista Matematică din Timişoara, apare sub conducerea unui Comitet compus din :

1. **Abason E.** Inginer, Doctor în Matematici, Justinian 20, Bucureşti.
2. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj
3. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, str. M. Cogâlniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi
5. **Alaci V.** Doctor în matematici, Profesor la Şc. Politechnică Timişoara.
6. **Alexandrescu Elena** Profesoară la externatul secundar de fete, str. Argetoianu 7, Constanţa.
7. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, inzestrarea căilor ferate, intinderea exploatării.
8. **Andronescu P.** Doctor Inginer, Profesor de Electrotechnică.
9. **Angelescu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
10. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
11. **Ardeleanu Ş.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice.
12. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu
13. **Bădulescu V.** Profesor Liceul M. Eminescu din Floreasca, Bucureşti.
14. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie.
15. **Balaban Gh.** Profesor la şc. secundară de fete gr. II, „Sturza Cantacuzino", Roman.
16. **Balaban N.** Profesor Lice l Carol I, Craiova
17. **Balasz D.** Inginer, Asistent la Şc. Politechnică, str. Gen. Joffre 12, Timişoara.
18. **Bănărescu M.** Inginer la Atelierele C.F.R., Profesor la Politechnică, str. Doja 51, Timişoara.
19. **Banciu I.** Prof., Dir. General al Contabilităţii în Ministerul de Instrucţie, str. Lucaci 95, Bucureşti.
20. **Bărglăzan A.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Electrotechnică.
21. **Baron C.** Asistent la catedra de Fizică, Sc. Politechnică, Timişoara.
22. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Rector al Şc. Politechnice, din Timişoara.
23. **Bobârnac M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice.
24. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi liceul Milit. str. Speranţei 12 Iaşi.
25. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
26. **Breazu D.** Profesor la Liceul din Caracal.
27. **Buicliu Gh.** Colonel în Artilerie, fost Profesor de Geometria Analitică la Şc. Politechnică Timişoara, Comandantul Regimentului 32 Obuziere, Cluj, str. Gh. Barţiu 22.
28. **Burghele B.** Inginer, serv. Hidraulic Galaţi.
29. **Butoescu T.** Inginer la Uzina Electrică Arad, Asistent la Şc. Politechnică:
30. **Câlniceanu C.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini, Conferenţiar.
31. **Cândea C.** Doctor-inginer, Profesor la Şc. Politechnică din Timişoara.
32. **Caraman E.** Director Şc. Normală Galaţi.
33. **Cârdeiu V.** Profesor la Liceul Aron Pumnul Cernăuţi.
34. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice.
35. **Chivulescu C.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, Târgovişte.
36. **Cica Gh.** Profesor la Şc. superioară de comerţ, Piteşti.
37. **Cismărescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, T.-Severin.
38. **Ciurceu V.** Inginer la Uzina Electrică Timişoara.
39. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de limba Engleză.
40. **Coman A.** Profesor Lic. C. Diaconovici-Loga Conferenţiar la Şc. Politechnică, str. Feldioara 1, Timişoara.
41. **Constantinescu Gh.** Profesor, Piaţa Elca 18. Craiova.
42. **Contrea A.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie.
43. **Corneanu P.** Inginer la Societatea Concordia Gura-Ocniţei, Dâmboviţa.
44. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
45. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie
46. **Cserveny I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice.
47. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematatici, Prof. la Universitatea din Cluj.
48. **Diaconescu N.** Profesor, Lic. din Slatina.
49. **Dimitriu-Arad** Profesor la Liceul Moise Nicoara, str. Bucur 3, Arad.
50. **Dragalina C.** Colonel, str. Gen. Dragalina No. 1, Bucureşti.
51. **Dumitrescu Gh.** Profesor, str. Gramont 16, Bucureşti.
52. **Duţulescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Eminescu 20, Bucureşti.
53. **Ferenc A.** Diplomat de Educaţie Fizică, Conducător de Educaţie Fizică.
54. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
55. **Frătici I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Cazane, Şc. Politechnică Timişoara.
56. **Gane V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Fizică Generală.
57. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti, str. Negru-Vodă 14, Piteşti.
58. **Ghermănescu M.** Profesor la Liceul Cantemir, str. Raion 31, Bucureşti.
59. **Hristea H.** Inginer la dep. C. F. R.
60. **Hubert N.** Inginer-arhitect, Bulevard. Mihai-Viteazul 21, Bucureşti.
61. **Ionescu K. C.** Director la Liceul Real, Dr. Meşota, Braşov.
62. **Iorgulescu T.** Licenţiat în Ştiinţe, Asistent pe lângă catedra de Geologie.
63. **Jecu M. I.** Licenţiat în Matematici, str. V Lascăr (Teilor) 77, Bucureşti

64. **Lambrino Gh.** Doctor in Drept şi Economie Politică, Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială.
65. **Laţiu V.** Doctor in Ştiinţele Naturale, Profesor de Geologia Zăcămintelor.
66. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică, str. Sălcii 11, Bucureşti.
67. **Linteş I.** Căpitan de Artilerie, str. Epicol 49, Bucureşti.
68. **Liteanu Gh.** Maior în Artilerie, Alea Sevastopol 27, Bucureşti.
69. **Lobonţ E.** Doctor in Ştiinţele Naturale, Profesor de Geologie şi Paleontologie.
70. **Lupan A.** Inginer, Director la Reşiţa, Prof. la Şc. Politechnică str. Povernei 3, Bucureşti.
71. **Magheru I.** Doctor in Ştiinţe, Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.
72. **Manughevici C.** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şc. Politechnică. str. Paul Chinezul 7, Timişoara.
73. **Mardan D.** Inginer-şef, directorul Fabricei de tutun, Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.
74. **Marinescu I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere.
75. **Mateescu Ş.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor de Mineralogie şi Petrografie.
76. **Mihaiu Emil** Profesor Şc. Comercială Timişoara şi Actuar Matematici, Diplomat.
77. **Mihaly E.** Profesor la Liceul din Deva.
78. **Miloia I.** Doctor în Litere şi Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă.
79. **Mioc V.** Profesor la Liceul Diaconovici-Loga, Timişoara şi Asistent la cadetra de Analiză, la Şc. Politechnică, Timişoara.
80. **Nadaşan St.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor.
81. **Naneş Gh.** Profesor la Lic. Sf. Sava, Bucureşti.
82. **Nichifor Gh.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti, str. Racoviţă 32, Bucureşti
83 **Nicolau A.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică, Uzină Electrică, Craiova
84. **Nicolau P.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
85. **Niculescu Cr.** Inginer-şef, Director General la Soc. I. A. R., Arad.
86. **Noaghea Gh.** Profesor la Lic. din Caransebeş.
87. **Oncica I.** Profesor la Liceul Piteşti.
88. **Onicescu O.** Profesor, Universitar. Clopotarii-vechi 25, Bucureşti.
89. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Prof. la Sc. Politechnică, Bucureşti.
90. **Orăşeanu Gr.** Profesor la Liceul Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
91. **Otopeanu C.** Inginer.
92. **Petrescu A.** Doctor în Matematici, Directorul Academie Agricole, Cluj.
93. **Petricoane D. M.** Directorul Liceului din Oraviţa.
94. **Popescu E.** Doctor în Chimie dela Sorbona, Profesor la Şc. Politechnică, Bucureşti.
95. **Popescu I.** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Conferenţiar de Prepararea Minereurilor.
96. **Protopopescu I.** Inginer-şef, Prof. la Şc. Politechnică, din Timişoara.
97. **Purcariu I.** Director General, Ministerul de Instrucţie Publică, Bucureşti.
98. **Racliş N. R.** Conferinţar la Universitatea din Bucureşti.
99. **Roibănescu C.** Profesor, Bulevard I. C. Brătianu 7, Tg.-Jiu.
100. **Saegiu E.** Inginer-şef, Serv. Constr. C.F.R. str. Berzei 70, Bucureşti.
101. **Şandor A.** Inginer, Dr. în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Termodinamică şi Fizică Industrială.
102. **Săuciuc L.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie.
103. **Schileru I.** Inginer, Conferenţiar de Electrotechnică şi Aplicaţiile Electricităţii în Mine, Cirectorul Şc. P. T. T. din Timişoara.
104. **Şerbănescu D.** Inginer la Calea Ferată, Arad-Podgorie.
105. **Sergescu P.** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Prof. la Universitatea din Cluj.
106. **Severineanu C.** Inginer-şef, Subdirectorul Serviciul tracţiunei CFR., Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.
107. **Simniceanu S.** Profesor, str. Griviţei 3, Craiova.
108. **Smighelschi O.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Electrotechnică.
109. **Spineanu C.** Profesor, str. Vestei 24, Târgoviste.
110. **Stambuleanu A.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Termodinamică şi Fizică Industrială.
111. **Stăncescu C.** Doctor-Inginer, Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.
112. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Construcţii.
113. **Ştefănescu O.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Miniere şi Topografie.
114. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini
115. **Stoicescu M.** Profesor str. Zefirului 4, Bucureşti.
116. **Teodorescu C.** Inginer-şef. Profesor la Şc. Politecnică, Direct. Uzinele Reşiţa.
117. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură Cluj.
118. **Thierrin G.** Directorul Inst. Schewitz Thierrin, Scaune 33, Bucureşti.
119. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Prof. Şc. Politechnică, Timişoara.
120. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Prof. la Universitatea din Bucureşti, str. Stefan 26.
121. **Vasiliu Gh.** Inginer la Depozitul C. F. R. Calea Traian 23, Satu-mare.
122. **Vasiliu M.** Inginer, Asistent la Şc. Politechnică Bucureşti, str. Obădeanu 10, Bucureşti.
123. **Vlad I. V.** Inginer-arhitect, Profesor la Şc. Politechnică, str. Traian Lalescu 1, Timişoara.
124. **Zăgănescu I.** Inginer, Conferenţiar de Calculul Grafic şi Vectorial.
125. **Zapan Gh.** Căp. aviator, str. Carol 8, Tecuci.

ANUL XI — No. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1931.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

Cuvânt înainte

Cu acest număr „*R. M. T.*“ întră în al XI-lea an de activitate, cu mulţumirea şi satisfacţiunea ce i-o dau conştiinţa datoriei implinite.

Acum 10 ani, odată cu infiinţarea Şcoalei Politechnice din Timişoara, primul său rector, *Traian Lalescu*, a cărui dispariţie prea timpurie a îndoliat ştiinţa românească, s'a gândit să infiinţeze şi „*R. M. T.*“ şi în primul său număr din 15 Martie 1921, spune:

„*Revista Matematică din Timişoara apare din nevoia simţită de a contribui la desvoltarea culturii matematice în ţinuturile alipite*“, iar mai departe: „*Războiul întregirii neamului ne-a dat putinţa să ne reîntindem peste ţara lasată nouă de Traian împăratul; datoria care ne-a rămas acum este să ne şi reinălţăm la faima culturii latine pe care o reprezintăm aci în centrul Europei*“.

„*Pentru aceasta trebuie muncă încordată şi ordonată. Fără să ne tulburăm de prigoana vremurilor de azi, să ne îndreptăm deadreptul la temelie; la şcoală. Socotim deci că, nu numai din punctul nostru de vedere special technic, dar chiar dintr'un punct de vedere general, încurajarea şcolărimei spre învăţământul ştiinţific, răspunde în mod fericit la această dublă îndrumare a educaţiei noastre naţionale.*

Pătrunşi de gândul luminat, patriotic şi inălţător desprins din rândurile de mai sus, corespunzător şi imboldului nostru interior, ne-am strâns în jurul „*R. M. T.*“ câţiva care am putut să-i oferim sprijinul şi activitatea noastră şi astfel „*R. M. T.*“ încă din primul an, şi-a întins activitatea nu numai în ţinuturile alipite, dar în tot cuprinsul Ţării.

Corespondenţi de la mai toate liceele din Ţară, de la diferite şcoli technice şi de la universitate, au lucrat cu drag şi cu folos şi la „*R. M. T.*“, rezolvind probleme propuse, trimeţând note sau articole matematice, familiarizându-se astfel cu spiritul şi atmosfera ştiinţifică; ceiace se poate vedea oricând răsfoind cele 10 volume ale „*R.M.T.*“.

Şi pe mulţi din aceşti harnici corespondenţi, i-am urmărit cu plăcere cum au evoluat progresiv, cum an de an şi-au mărit puterea de pătrundere şi raţionament pentru chestiuni din ce în ce mai grele. Ei, s'au orientat tot mai înţelegători şi mai pregătiţi în frumoasele şi minunatele ţinuturi ale domeniului matematic, au simţit tot farmecul unei formule găsite, sau unor proprietăţi ale unei figuri geometrice, pe care le-au înţeles, le-au admirat şi de care s'au pasionat.

E drept însă, că de cât-va timp din cauza reducerei matematicilor din programele de liceu şi din cauza suprimărei clasei a VIII-a liceale, numărul corespondenţilor s'a micşorat; dar avem credinţa că în curând programele de matematici de la licee se vor întregi, prin infiinţarea secţiei reale.

Menţionăm, că avem şi astăzi mulţi corespondenţi de la liceele militare, unde programul de matematici nu s'a modificat, relevăm încă cu plăcere activitatea unora din profesorii de la licee, care au ştiut şi ştiu să stimuleze, să îndrumeze şi să insufle elevilor încă de timpuriu dragostea de ştiinţă.

Dat fiind că „*R. M. T.*“ va publica şi de aci înainte chestiuni adequate noilor programe de liceu, ne adresăm hotărât şi inzistent tuturor profesorilor de matematici dela liceele din Ţară, rugându-i să folosească această *Revistă*, s'o facă cunoscut elevilor pe care îi indrumează şi să se înscrie în *Comitetul de conducere*, dându-ne sprijinul lor preţios.

N'am putea termina aceste rânduri, fără a mărturisi că mulți din cei strânși în jurul „*R. M T.*" am câștigat dragostea și interesul pentru științele matematice, fiind corespondenți și membrii a-i „*Gazetei Matematice*" *din București, care se află astăzi în al XXXVI-lea an de rodnică activitate și profitând de acest prilej fericit, ne îndreptăm cu respect, cu recunoștiință și admirație gândul, către* **Gazeta Matematică,** *care a fost pentru noi un îndreptar luminos.*

„*R. M. T.*" aducând mulțumiri călduroase tuturor celor ce au sprijinit-o ca să poată înscrie cei 10 ani de activitate în ogorul matematic, în primul rând *Ministerului de Lucrări Publice, Ministerului de Instrucțiune Publică, Casei Școalelor, precum și tuturor colaboratorilor și corespondenților săi,* contează și mai departe pe concursu ce l-a avut și își continuă mersul neîntrerupt de până acum.

Redacția

SISTEME DE ECUAȚIUNI ȘI IDENTITATI ALGEBRICE

de VIRGIL CLAUDIAN

1. Să considerăm următorul sistem de ecuațiuni:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda_1+a_1}+\dfrac{y}{\lambda_1+a_2}+\dfrac{z}{\lambda_1+a_3}-1=0 \\ \dfrac{x}{\lambda_2+a_1}+\dfrac{y}{\lambda_2+a_2}+\dfrac{z}{\lambda_2+a_3}-1=0 \\ \dfrac{x}{\lambda_3+a_1}+\dfrac{y}{\lambda_3+a_2}+\dfrac{z}{\lambda_3+a_3}-1=0 \end{cases}$$

Ne propunem să rezolvăm acest sistem cunoscut precum și altele analoage, după care vom trage concluzii remarcabile de ordin algebric. Să considerăm funcția:

$$(2)\quad F(\theta)=\frac{x}{\theta+a_1}+\frac{y}{\theta+a_2}+\frac{z}{\theta+a_3}-1\ .$$

Pentru $\theta=\lambda_1$, $\theta=\lambda_2$, $\theta=\lambda_3$ funcția $F(\theta)$ se anulează, în virtutea ecuațiilor (1). De unde reese că:

$$(2')\quad F(\theta)=\frac{-(\theta-\lambda_1)(\theta-\lambda_2)(\theta-\lambda_3)}{(\theta+a_1)(\theta+a_2)(\theta+a_3)}$$

Din (2) și (2') deducem evident egalitatea:

$$(3)\quad \frac{-(\theta-\lambda_1)(\theta-\lambda_2)(\theta-\lambda_3)}{(\theta+a_1)(\theta+a_2)(\theta+a_3)}=\frac{x}{\theta+a_1}+\frac{y}{\theta+a_2}+\frac{z}{\theta+a_3}-1$$

Inmulțim aci ambii membri cu $\theta+a_1$ și facem apoi $\theta=-a_1$; apoi facem aceiași operație cu $\theta+a_2$ și $\theta+a_3$. Deducem prinurmare:

$$(4)\quad x=\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)},$$

$$y=\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)},$$

$$z=\frac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

Din identitatea (3) însă deducem prin identificare:

$$(3')\quad x(\theta+a_2)(\theta+a_3)+y(\theta+a_1)(\theta+a_3)+z(\theta+a_1)(\theta+a_2)-(\theta+a_1)(\theta+a_2)(\theta+a_3)=-[\theta^3-\theta^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\theta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)-\lambda_1\lambda_2\lambda_3].$$

Dacă, în ambii membri, egalăm coeficienții lui θ^2, θ și termenii indepedenți de θ, apoi atunci deducem formulele:

$$(5)\quad x+y+z=a_1+a_2+a_3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\ ,$$

$$(6)\quad (a_2+a_3)x+(a_3+a_1)y+(a_1+a_2)z=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3$$

$$7)\quad a_2a_3x+a_3a_1y+a_1a_2z=a_1a_2a_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Ținând seama de valorile (4) ale lui x, y, z pe care le introducem în (5), (6), (7) deducem următoarele identități remarcabile:

$$(5')\quad \frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}=a_1+a_2+a_3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\ ,$$

$$(6')\quad \Sigma(a_2+a_3)\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3\ ,$$

$$(7')\quad \Sigma\frac{a_2a_3(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=a_1a_2a_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ .$$

2. Identităţile (5′), (6′), (7′) sunt foarte interesante şi ne pot conduce la alte identităţi remarcabile prin particularizări. Să facem în (5′)

$$\lambda_1 = a_1\ ,\qquad \lambda_2 = a_2\ ,\qquad \lambda_3 = a_3$$

şi reese:

$$(8)\qquad \Sigma a_1 \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} = a_1+a_2+a_3$$

Această identitate ne conduce la a cerceta identităţi mult mai generale, de formele următoare:

$$(9)\ \Sigma a_1^n \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\ ;\ \Sigma \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)}{a_1^n(a_1-a_2)(a_1-a_3)},$$

3. Să considerăm acum următorul sistem de ecuaţiuni:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda_1+a_1}+\dfrac{y}{\lambda_1+a_2}+\dfrac{z}{\lambda_1+a_3}+\dfrac{u}{\lambda_1+a_4}-1=0 \\ \dfrac{x}{\lambda_2+a_1}+\dfrac{y}{\lambda_2+a_2}+\dfrac{z}{\lambda_2+a_3}+\dfrac{u}{\lambda_2+a_4}-1=0 \\ \dfrac{x}{\lambda_3+a_1}+\dfrac{y}{\lambda_3+a_2}+\dfrac{z}{\lambda_3+a_3}+\dfrac{u}{\lambda_3+a_4}-1=0 \\ \dfrac{x}{\lambda_4+a_1}+\dfrac{y}{\lambda_4+a_2}+\dfrac{z}{\lambda_4+a_3}+\dfrac{u}{\lambda_4+a_4}-1=0 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem procedăm ca mai sus.

Considerăm prinurmare funcţiunea:

$$F(\theta) = \frac{x}{\theta+a_1}+\frac{y}{\theta+a_2}+\frac{z}{\lambda+a_3}+\frac{u}{\theta+a_4}-1$$

Ţinând seama de ecuaţiunile (10), vedem imediat, că pentru $\theta=\lambda_1$, $\theta=\lambda_2$, $\theta=\lambda_3$ şi $\theta=\lambda_4$, funcţiunea $F(\theta)$ se anulează. Avem prinurmare:

$$(11)\qquad \frac{-(\theta-\lambda_1)(\theta-\lambda_2)(\theta-\lambda_3)(\theta-\lambda_4)}{(\theta+a_1)(\theta+a_2)(\theta+a_3)(\theta+a_4)} =$$

$$\frac{x}{\theta+a_1}+\frac{y}{\theta+a_2}+\frac{z}{\theta+a_3}+\frac{u}{\theta+a_4}-1\ .$$

De aci deducem ca mai sus:

$$(12)\quad \begin{cases} x=\dfrac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_1+\lambda_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} \\ y=\dfrac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)(a_2+\lambda_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} \\ z=\dfrac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)(a_3+\lambda_4)}{(a_3-a_1)(a_3+a_2)(a_3-a_4)} \\ u=\dfrac{(a_4+\lambda_1)(a_4+\lambda_2)(a_4+\lambda_3)(a_4+\lambda_4)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)} \end{cases}$$

Pe dealtă parte, egalitatea (11) se mai scrie:

$$x(\theta+a_2)(\theta+a_3)(\theta+a_4)+y(\theta+a_1)(\theta+a_3)\times$$
$$(\theta+a_4)+z(\theta+a_1)(\theta+a_3)(\theta+a_4)+$$
$$u(\theta+a_1)(\theta+a_2)(\theta+a_3)-(\theta+a_1)(\theta+a_2)\times$$
$$(\theta+a_3)(\theta+a_4)=-(\theta-\lambda_1)(\theta-\lambda_2)(\theta-\lambda_3)(\theta-\lambda_4)$$

Dacă aci identificăm, în ambii membri, coeficienţii lui θ^3, θ^2, θ şi termenii independenţi de θ, apoi atunci obţinem şirul de egalităţi:

$$(13)\quad x+y+z+u=a_1+a_2+a_3+a_4+$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\ ,$$

$$(14)\quad (a_2+a_3+a_4)x+(a_1+a_3+a_4)y+$$
$$(a_1+a_2+a_4)z+(a_1+a_2+a_3)u=$$
$$a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4-$$
$$\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_1\lambda_4-\lambda_2\lambda_3-\lambda_2\lambda_4-\lambda_3\lambda_4\ ,$$

$$(15)\ (a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x+(a_1a_3+a_1a_4+a_3a_4)y+$$
$$(a_1a_2+a_1a_4+a_2a_4)z+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)u=$$
$$a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4+$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4\ ,$$

$$(16)\quad a_2a_3a_4x+a_1a_3a_4y+a_1a_2a_4z+a_1a_2a_3u=$$
$$a_1a_2a_3a_4-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\ .$$

Ţinând seama de valorile (12), deducem următoarele identităţi remarcabile:

$$(13')\qquad \Sigma\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_1+\lambda_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} =$$
$$\Sigma a_1+\Sigma\lambda_1\ ,$$

$$(14')\qquad \Sigma(a_2+a_3+a_4)\times$$
$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+a_2)(a_1+\lambda_3)(a_1+\lambda_4}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}=\Sigma a_1a_2-\Sigma\lambda_1\lambda_2,$$

$$(15')\qquad \Sigma(a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)\times$$
$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_1+\lambda_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} =$$
$$\Sigma a_1a_2a_3+\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ ,$$

$$(16')\ \Sigma\frac{a_2a_3a_4(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_1+\lambda_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} =$$
$$a_1a_2a_3a_4-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\ .$$

4. Din aceste identităţi se pot deduce alte identităţi remarcabile prin particularizări diferite. Aşa spre exemplu, dacă în (13′) facem $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2$, $\lambda_3 = a_3$ şi $\lambda_4 = a_4$, deducem:

$$(17) \qquad \Sigma a_1 \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_1+a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} = a_1+a_2+a_3+a_4 .$$

Această formulă ne conduce, la a considera expresii şi mai generale, de formele:

$$(18) \qquad \Sigma a_1^n \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_1+a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} ;$$

$$(19) \qquad \Sigma \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_1+a_4)}{a_1^n(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)},$$

unde n nu este un număr întreg pozitiv.

5. După cum se vede am considerat până aci sistemele particulare de ecuaţiuni (1) şi (10), şi din soluţiile lor am dedus identităţi interesante. Este evident, că putem considera un sistem general, de mai multe ecuaţii. Am considerat însă aceste sisteme particulare, procedând pe cale *inductivă*, pentrucă am dedus o serie de identităţi, care pot forma exerciţii de Algebră elementară. Adaog că putem demonstra, în general, că avem:

$$(20) \qquad \Sigma \frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\ldots(a_1+\lambda_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} = a_1+a_2+\ldots+a_n+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n ,$$

$$(21) \qquad \Sigma a_1 \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)\ldots(a_1+a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} = a_1+a_2+\ldots+a_n ,$$

şi că am putea face ceva cercetări, asupra unor expresii mai generale, de formele:

$$(22) \qquad \Sigma a_1^k \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)\ldots(a_1+a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} ;$$

$$(23) \qquad \Sigma \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)\ldots(a_1+a_n)}{a_1^k(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)},$$

unde k este un număr întreg şi pozitiv.

Dacă în (20) facem $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$, reese:

$$(24) \qquad \Sigma \frac{a_1^n}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} = a_1+a_2+\ldots+a_n$$

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

1. *O teoremă* **Van Aubel.** D-l *C. Coşniţă* în articolul său, enunţă la pagina 122 Vol. X. R. M. T. următoarea teoremă despre care spune că e indicată ca nerezolvată în *Recueil de problèmes mathématiques* de *C. A. Laisant:*

Se ia punctul M *arbitrar pe ipotenuza* B C *a triunghiului dreptunghic* A B C. *Să se stabilească relaţia:*

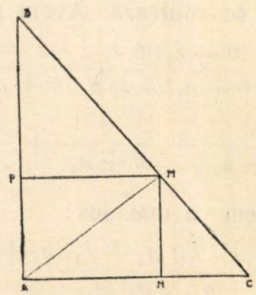
$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 \cdot \overline{MB}^2 = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AM}^2$$

Van Aubel

D-l *C. Coşniţă* dă o soluţie prin inversiune şi opinează că soluţia directă a problemei nu e tocmai simplă.

Nu cunosc această interesantă relaţiune, care are multă analogie cu relaţiunea lui *Stewart*, dar voi arăta în cele ce urmează că ea se verifică foarte uşor cu primele elemente de geometrie.

Fie N şi P proecţiile lui M pe A C şi A B. Triunghiurile dreptunghice formate pe figură, dau imediat:



$$\overline{MC}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NC}^2$$

$$\overline{MB}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PB}^2$$

Triunghiurile asemeni M P B, C A B pe de o parte, M N C şi B A C pe de altă parte dau;

$$PB = \frac{AB \cdot PM}{AC} \qquad \text{şi} \qquad NC = \frac{MN \cdot AC}{AB}$$

care introduse în precedentele conduc la:

$$\overline{MC}^2 = \overline{MN}^2 + \frac{\overline{MN}^2 \cdot \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}$$

$$\overline{MB}^2 = \overline{MN}^2 + \frac{\overline{PM}^2 \cdot \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

Consider suma:

$$S = \overline{AB}^2 \cdot \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 \cdot \overline{MB}$$

în care înlocuesc pe MC şi MB prin valorile precedente, şi găsesc:

$$S = \overline{AB}^2 \cdot \overline{MN}^2 + \overline{MN}^2 \cdot \overline{AC} +$$

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{MP}^2 + \overline{MP}^2 \cdot \overline{AB}^2$$

$$\therefore \quad \overline{AB}^2 (\overline{MN}^2 + \overline{MP}^2) + \overline{AC}^2 (\overline{MN}^2 + \overline{MP}^2)$$

Dar:

$$\overline{MN}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{MN}^2 = \overline{AM}^2$$

deci:

$$S = (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)\,\overline{AM}^2 = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AM}^2$$

adică tocmai relaţiunea lui *Van Aubel*.

Demonstraţia este aşa de simplă, în cât este imposibil să nu mai fi fost găsită, după cum de asemeni este foarte probabil că problemei i s-au mai dat şi alte soluţii elementare.

COL. GH. BUICLIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazata Matematică*, anul XXXVI, No. 6, Februarie 1931. Un răspuns şi o generalizare, de † *V. Cristescu*. Asupra dreptelor lui *Simson*, de *N. Teodorescu*.

2. *Mathematica*, vol. IV, 1930. Uu coup d'oeil sur l'histoire des sciences et des théories physiques, par *Emile Picard*. Une application de la résultante de deux fonctions, par *Michel Petrovitch*, professeur à l'Université de Belgrade. Sur un mode de croissance régulière des fonctions, par *Dr. J. Karamata*, à Belgrade. Sur le problème de *M. Jaques Hadamard* d'uniformisation des ensembles, par *N. Lusin*, professeur à l'Université de Moscou. Sur le problème de Dirichlet pour les systèmes lineaires d'équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique, par *N. Ciorănescu*. Remarque sur les polynomes de meilleure approximation, par *Tiberiu Popoviciu*. Sur le domaine riemannien couvert par les valeurs d'une fonction holomorphe, par *Georges Valiron*. Sur le nombres algébriques, par *J. Favard*. Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés, par *Elie Cartan*. Sur une propriété topologique intuitive caractéristique des courbes de *Jordan* sans point double, par *A. Marchaud*. Tourbillons, ondes, quanta, par *A. Buhl*. Sur certains ensembles plans, par *W. Sierpinschi*. Sur certaines fonctions holomorphes et bornées dans un cercle, par *Henri Milloux*. *Paul Appel*, par *D. Pompeiu*. La série de Taylor d'une fonction holomorphe déduite comme un developpement d'après les fonctions d'une noyau symétrique généralisé, par *Th. Angeluţa*.

3. *Boletin Matematico*, anul III, No. 8, Agosto-Octombre 1930, Buenos-Aires. Asupra unei ecuaţii diferenţiale speciale de ordinul doi, de *W. Lewitcky*. Asupra dreptei lui Simson, de *V. Thébault*. Asupra demonstraţiei teoremei lui *Bezout*, de *J. Tschlek*, (notă)

4. *Boletin Matematico*, anul III, No. 9, Septembrie-Noemvrie 1930, *Buenos Aires*., † Prof. Inginer *Artur Sallovitz*. O clasă de ecuaţiuni elementare, de *G. Tziteica*. (Reprodus din Gazeta Matematică, Bucureşti). Demonstraţia teoremei lui Bezout, de *Tschlek*. Societăţi matematice cu cel mai mare număr de membri de *Enrique Sparn*.

5. *T. Levi-Civita*. Sugli invarianti adiabatici.

6. *T. Levi-Civita*. Über dynamische Beanspruchung-elastischer-Systeme.

7. *T. Levi-Civita*. Sui potenziali newtoniani dovuti a distribuzioni che si estendono illimitamente.

8. *Petre Sergescu*. Evoluţia concepţiei despre univers. (Extras din revistă Propilee Literarare, 1930).

9. *Petre Sergescu*. L'évolution des principes de la mécanique de *Newton* à *Laplace*.

10. *Petre Sergescu*. *E. Picard*. (Cu prilejul sărbătorirei jubileului său de la 5 Mai 1928), Extras din Revista V. Adamachi).

11. *Petre Sergescu*. Sur les zéros des polynomes.

12. *Petre Sergescu*. Le premier congrés des mathématiciens roumains. (Extrais de l'Enseignement mathématique, 1930.)

13. *J. Karamata*. Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze.

14. *C. Teodorescu*. Un problème de flambage.

15. *Dr. Stefan I. Mateescu*. Date noui asupra structurei geologice à depresiunei zalăului.

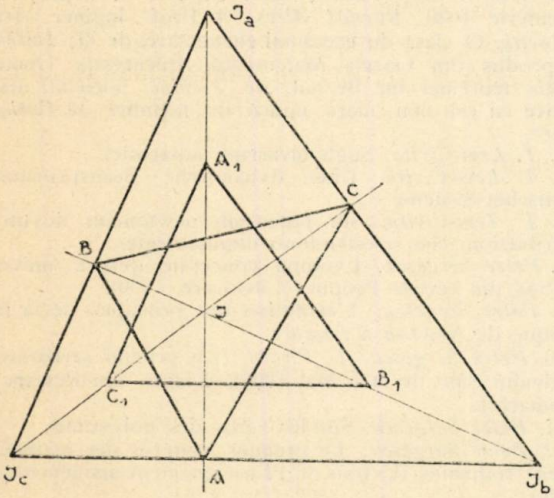
16. *Inginer Ion C. Schileru* Măsurătoarea industrială a rezistenţelor cu metoda Volt-Ampermetrica. (litografiat).

PROBLEME REZOLVATE

592. — *Se construeşte un triunghiu* $A_1 B_1 C_1$ *ale cărui vârfuri se găsesc pe bisectoarele interioare* AI, BI, CI *ale unui triunghiu dat* ABC *şi ale cărui laturi* $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ *sunt paralele respectiv cu bisectoarele exterioare ale unghiurilor* C, A, B *ale triunghiului* ABC. *Se construeşte din* $A_1 B_1 C_1$ *un triunghiu* $A_2 B_2 C_2$ *după cum s'a construit* $A_1 B_1 C_1$ *din* ABC. *Şi aşa mai departe se obţin triunghiurile* $A_3 B_3 C_3 \ldots A_i B_i C_i$. *Să se demonstreze că triunghiul* $A_i B_i C_i$ *este echilateral atunci când i este infinit de mare.*

COL. GH. BUICLIU

Fie I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exinscrise triunghiului A B C. Se ştie ca A I, B I, C I trec respectiv prin I_a, I_b, I_c şi sunt înălţimi în triunghiul $I_a I_b I_c$. Deci pentru a construi un triunghiu $A_1 B_1 C_1$ este suficient a lua A_1 arbitrar pe A I şi a duce paralele $A_1 B_1$, $A_1 C_1$ la $I_a I_b$, $I_a I_c$. Triunghiul format având $B_1 I_b \perp A_1 C_1$ şi $C_1 I_c \perp A_1 B_1$ are orto-



centrul în I, deci $B_1 C_1 \parallel I_b I_c$. După cum se vede se pot construi o infinitate de triunghiuri $A_1 B_1 C_1$, toate asemeni între ele şi asemeni cu $I_a I_b I_c$ aşa că avem:

$$\sphericalangle C_1 A_1 B_1 = \sphericalangle B I_a C.$$

Din patrulaterul înscriptibil $B I C I_a$ se scoate:

$$\sphericalangle B I_a C = \pi - \widehat{BIC}$$

iar din triunghiul B I C se scoate:

$$\sphericalangle B I C = \pi - \left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$\therefore (1) \quad \widehat{A_1} = \widehat{B I_a C} = \frac{B+C}{2} = \frac{\pi - A}{2}$$

Se găseşte la fel:

$$B_1 = \frac{C+A}{2} = \frac{\pi - B}{2}; \; C_1 = \frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2}.$$

Din aceste rezultate se deduce cu uşurinţă valoarea lui A_i în funcţie de A. In adevăr avem succesiv, ţinând seamă de (1):

$$A_2 = \frac{\pi - A_1}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi - A}{2}}{2} = \frac{\pi + A}{2}$$

$$A_3 = \frac{\pi - A_2}{2} = \frac{(2^2 - 1)\pi - A}{2^3}$$

$$A_4 = \frac{\pi - A_3}{2} = \frac{(2^3 - 2^2 + 1)\pi + A}{2^4}$$

$$A^5 = \frac{\pi - A_4}{2} = \frac{(2^4 - 2^3 + 2^2 - 1)\pi - A}{2^5}$$

. . . . . .

$$A_i = \frac{\pi - A_{i-1}}{2} =$$

$$\frac{[2^{i-1} - 2^{i-2} + \ldots + (-1)^{i-1} 2^2 + (-1)^i]\pi + (-1)^i A}{2_i}$$

Dacă se ţine seamă că suma:

$$2^{i-1} - 2^{i-2} + \ldots + (-1)^{i-1} 2^2$$

este o progresie geometrică de $i-2$ termeni cu raţia $\frac{-1}{2}$ şi cu primul termen 2^{i-1} şi dacă se fac toate calculele se găseşte:

$$A_i = \frac{[2^i - (-1)^{i-2} 2^2 + (-1)^i 3]\pi + (-1)^i 3 A}{3 . 2^i}$$

$$\therefore \quad A_i = \left[1 - \frac{(-1)^{i-2}}{2^{i-2}} + \frac{(-1)^i 3}{2^i}\right]\frac{\pi}{3} + \frac{(-1)^i A}{2^i}$$

Făcând pe i să tindă la infinit şi trecând la limită se găseşte:

$$\text{Lim. } A_i = \frac{\pi}{3} = 60^0$$

Se găseşte la fel:

$$\text{Lim. } B_i = \text{Lim. } C_i = 60^0$$

deci triunghiul $A_i B_i C_i$ este echilateral.

1°. Problema 592 propusă iniţial la pagina 142 Vol. VI. având enunţul eronat, a fost propusă a douaoară cu enunţul rectificat la pagina 86 Vol. VII.

2°. Au demonstrat problema cu enunţul rectificat d-nii *D. Nestor* şi *A. N. Stoica.*

3°. D-nii *V. Novacu* şi *St. D. Popescu* au arătat la timp că enunţul din Vol. VI conţinea o eroare, dar nu au demonstrat problema cu enunţul rectificat din Vol. VII.

778. — *Să se studieze variaţiunea funcţiunii:*

$$y=\frac{1}{84}\begin{vmatrix} 7x & 12 & 4xy+52 \\ 14 & \frac{9}{x} & \frac{4x^2+36}{x} \\ 28x & 9 & 36+x^2 \end{vmatrix}$$

ALMAJAN PETRU

Dând factor comun în linia a doua pe $\frac{1}{x}$, apoi în coloana întâia pe $7x$ şi în a doua pe 3, obţinem:

$$y=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4xy+52 \\ 2 & 3 & 4x^2+36 \\ 4 & 3 & x^2+36 \end{vmatrix}=$$

$$\frac{1}{4}[-6(4xy+52)+13(4x^2+36)-5(x^2+36)]$$

$$\therefore \quad (1) \qquad 4y=47x^2-24xy-24$$

Rezolvind în raport cu y, găsim:

$$y=\frac{47x^2-24}{4(6x+1)}$$

Se vede uşor că funcţiunea y taie axa abscizelor în punctele:

$$\left(-\sqrt{\frac{24}{47}},\ 0\right) \text{ şi } \left(\sqrt{\frac{24}{27}},\ 0\right)$$

apoi ea fiind descontinuă pentru $x=-\frac{1}{6}$, urmează să studiem variaţiunea ei în două intervale de continuitate

$$\left(-\infty, -\frac{1}{6}-\varepsilon\right) \text{ şi } \left(-\frac{1}{6}+\varepsilon, +\infty\right),$$

însemnând cu ε un număr pozitiv ori cât de mic.

Calculând derivata funcţiunii y în raport cu x, obţinem:

$$y'=\frac{141x^2+47x+72}{2(6x+1)^2},$$

dar numărătorul având cele două rădăcini ale lui imaginare, are semnul primului său termen, adică pozitiv, în orice interval de la $-\infty$ la $+\infty$, asemenea numitorul fiind un patrat perfect este pozitiv în orice interval al valorilor reale ale lui x.

Aşa dar, y' fiind pozitiv în orice interval, când x creşte în intervalul $\left(-\infty, -\frac{1}{6}-\varepsilon\right)$ sau $\left(-\frac{1}{6}+\varepsilon, +\infty\right)$ funcţiunea y creşte continuu dela $-\infty$ la $+\infty$.

Pentru trasarea curbei reprezentative a acestei variaţiuni, este bine să observăm că ecuaţiunea (1) reprezintă o iperbolă cu direcţiunile asimptotice reale $x=0$ şi $47x-24y=0$ şi cu centru în punctul $\left(\frac{1}{6}, -\frac{47}{72}\right)$.

Au rezolvat problema dnii: *Băcicov P. Boris, Brotmann I., Coşniţă Cezar, Dimitriu At. Ioan, Ionescu Ţiu D. C-tin, Hamerak C., Marineanu Traian, Mihalcea Emil, Petrovici D.* şi *Vâlceanu N. Justin.*

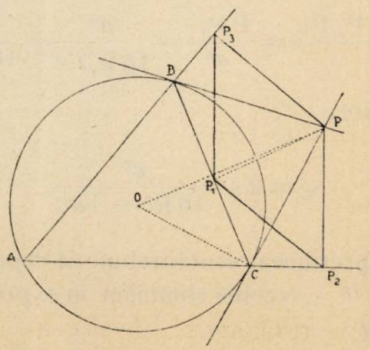
O. N. Ţ.

820. — *Se consideră triunghiul* A B C *înscris în cercul* O. *Să se arate că polul laturei* B C *în raport cu cercul* O *şi proecţiunile lui pe laturile triunghiului, sunt vârfurile unui paralelogram, a cărui arie este dată de formula:*

$$s_1=\frac{8s^3}{(b^2+c^2-a^2)^2}$$

CEZAR COSNITA

Pentru a construi polul dreptei B C în raport cu cercul O, ducem tangentele la cercul O în punctele B şi C; fie P punctul lor de întâlnire, iar P_1, P_2, P_3 proecţiunile acestui punct pe laturile B C, A C, A B.



Patrulaterele $P P_1 B P_3$ şi $P P_1 C P_2$ fiind înscriptibile (având fiecare două unghiuri opuse

drepte) şi dreptele P B şi P C fiind tangente cercului O, avem relaţiunile:

$$(1)\begin{cases} \sphericalangle P P_1 P_3 = \sphericalangle P B P_3 = \sphericalangle B C A = \\ 180^0 - \sphericalangle P_1 C P_2 = \sphericalangle P_1 P P_2 \\ \sphericalangle P P_1 P_2 = \sphericalangle P C B_2 = \sphericalangle C B A = \\ 180^0 - \sphericalangle P_1 B P_3 = \sphericalangle P_1 P P_3 , \end{cases}$$

care arată că perechile de drepte $(P_1 P_3, P P_2)$ şi $(P_1 P_2, P P_3)$ făcând respectiv, cu secanta $P P_1$ unghiuri alterne interne egale, sunt perechi de drepte paralele. Aşa dar, patrulaterul $P P_2 P_1 P_3$ este un paralelogram.

Trecem acum să calculăm aria s_1 a paralelogramului $P P_1 P_3 P_2$.

Observăm că:

$$(2) \qquad s_1 = 2 \text{ aria } P P_3 P_1$$

Dar triunghiul $P P_3 P_1$, având două unghiuri egale cu ale triunghiului B A C, cum reiasă din (1), rezultă că el este asemenea cu triunghiul A B C, deci avem între ariile respective, relaţiunea:

$$(3) \qquad \frac{\text{aria } P P_3 P_1}{\text{aria } B A C} = \frac{\overline{P P_1}^2}{\overline{B C}^2} = \frac{\overline{P P_1}^2}{a^2}$$

De altă parte, din triunghiurile dreptunghice O C P şi O C P_1, avem succesiv relaţiunile:

$$\overline{P P_1} \cdot \overline{P_1 O} = \overline{C P_1}^2 = \frac{\overline{B C}^2}{4} = \frac{a^2}{4},$$

$$\overline{P_1 O}^2 = \frac{4 R^2 - a^2}{4},$$

deci:

$$(4) \quad \frac{\text{aria } P P_3 P_1}{s} = \frac{\overline{P P_1}^2}{a^2} = \frac{a^2}{16 \overline{P_1 O}^2} = \frac{a^2}{16 R^2 - 4 a^2}$$

şi ca urmare:

$$(5) \qquad s_1 = 2 s \frac{a^2}{16 R^2 - 4 a^2}$$

Cum expresiunea cerută trebuie să depindă numai de s şi a, b, c, trebuie eliminăm în expresiunea (5) pe R^2; dar:

$$R = \frac{a b c}{4 s}, \qquad \text{deci:} \qquad 16 R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{s^2},$$

şi ca urmare:

$$(6) \quad s_1 = 2 s \frac{a^2}{\frac{a^2 b^2 c^2}{s^2} - 4 a^2} = \frac{2 s^3}{b^2 c^2 - 4 s} = \frac{8 s^3}{4 b^2 c^2 - 16 s^2}$$

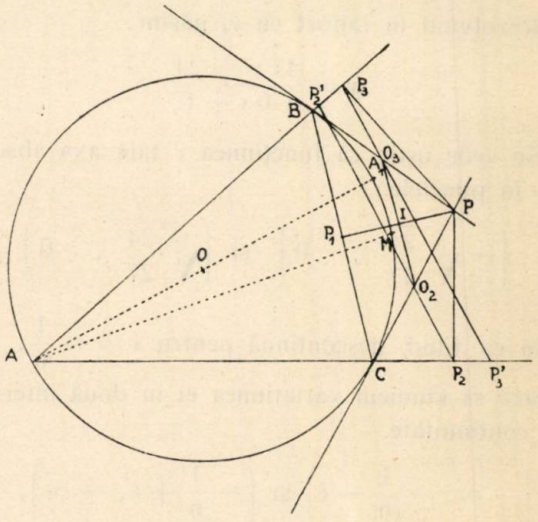
Dar:

$$16 s^2 = (a + b + c)(c + b - a)(a + c - b) \times (a + b - c) = 4 b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Ţinând seamă de această ultimă relaţiune, avem expresiunea cerută:

$$(7) \qquad s_1 = \frac{8 s^3}{(b^2 + c^2 - a^2)^2}$$

Soluţiunea 2-a. Pe lângă notaţiunile precedente fie O_3 şi O_2 mijloacele tangentelor P B şi P C; apoi P'_2, P'_3 punctele unde $P_2 O_2$ şi $P_3 O_3$ taie respectiv laturile A B şi A C. Segmentul $O_2 O_3$



este paralel cu B C, trece prin mijlocul I al segmentului $P P_1$ şi punctul I este şi mijlocul său. Dreptele $P_2 O_2$ şi $P_3 O_3$ sunt ambele antiparalele laturei B C relativ la acelaş unghiu B A C. Intr'adevăr, $P_3 O_3$ şi $P_2 O_2$ fiind mediane în triunghiurile dreptunghice $P P_3 B$ şi $P B_2 C$, avem imediat:

$$(8) \qquad \sphericalangle O_3 P_3 A = \sphericalangle P_3 B O_3 = \sphericalangle A C B \text{ şi}$$

$$\sphericalangle O_2 P_2 A = \sphericalangle O_2 C P_2 = \sphericalangle A B C$$

Urmează că O_3P_3 şi P_2O_2 sunt paralele, Dar avem încă relaţiunile:

$$(9) \qquad \overline{P_3O_3} = \frac{1}{2}\overline{PB} = \frac{1}{2}\overline{PC} = \overline{P_2O_2},$$

deci patrulaterul $P_3O_3P_2O_2$ este un paralelogram şi ca urmare P_2P_3 trece prin punctul I şi este impărţită în părţi egale de acest punct.

Aşa dar, diagonalele patrulaterului $PP_2P_1P_3$ împărţindu-se reciproc în părţi egale, $PP_2P_1P_3$ este un paralelogram.

Observări. 1°. AP_1 este a treia înălţime a triunghiului AP_2P_3, adică P_2P_3 este perpendiculară pe $\overline{AP_1}$ mediana triunghiului BAC, prin urmare unghiul diagoanelor paralelogramului $PP_2P_1P_3$ este egal cu unghiul pe care îl face mediana triunghiului BAC cu latura corespunzătoare BC.

2°. Insemnând cu R_1 raza cercului P_2PP_3A, avem:

$$(10) \qquad s_1 = 2\,\text{aria}\,P_2PP_3 = 2\frac{\overline{PP_2}\cdot\overline{PP_3}\cdot\overline{P_2P_3}}{4R_1} =$$

$$\overline{PP_2}\cdot\overline{PP_3}\cdot\frac{\overline{P_2P_3}}{2R_1}$$

Fie M punctul unde AP taie a doua oară cercul O. Triunghiul BMC este asemenea cu P_2PP_3, căci folosind cele două cercuri ABC şi P_2PP_3A, avem:

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\sphericalangle PP_2P_3 = \sphericalangle PAP_3 = \sphericalangle BAM = \sphericalangle BCM \\ &\sphericalangle PP_3P_2 = \sphericalangle PAP_3 = \sphericalangle CAM = \sphericalangle CBM \end{aligned}$$

rezultă proporţionalitatea elementelor omoloage:

$$(12) \qquad \frac{\overline{PP_2}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{BC}} = \frac{2R_1}{2R},$$

de unde deducem:

$$(13) \qquad \frac{\overline{P_2P_3}}{2R_1} = \frac{BC}{2R} = \frac{a}{2R}$$

De altă parte, A_1 fiind a doua extremitate a diametrului $\overline{AOA_1}$, se vede imediat că perechile de triunghiuri (PCP_2, AA_1C) şi (PBP_3, AA_1B) sunt asemenea, deci avem:

$$(14) \qquad \frac{\overline{PP_2}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AC}}{2R} \quad \text{şi} \quad \frac{PP_3}{PB} = \frac{AB}{2R}$$

Ţinând seamă de relaţiunile (13) şi (14) relaţiunea (10) devine:

$$s_1 = \frac{abc}{8R^3}\cdot\overline{PB}^2 = 2s.\frac{\overline{PB}^2}{4R^2}$$

Avem însă:

$$\overline{PB}^2 = \overline{OP}^2 - R^2 \quad \text{şi} \quad \overline{OP}^2 = \frac{R^4}{\overline{OP_1}^2} = \frac{4R^4}{4R^4 - a^2},$$

deci:

$$\overline{PB}^2 = \frac{a^2R^2}{4R^2 - 4a^2}$$

şi ca urmare:

$$(15) \qquad s_1 = 2s.\frac{a^2}{16R^2 - 4a^2}$$

identică cu expresiunea (5) din prima soluţiune.

Restul ca în prima soluţiune.

Au dat soluţiuni analoage cu prima, însă servindu-se pentru calculul ariei s_1 de relaţiunile trigonometrice dintr'un triunghiu, d-nii: *Coşniţă Cezar*, *Murăroiu I.* şi *Vălceanu Justin*.

D-l *Ghişoiu I Petre*, a dat o soluţiune în întregime trigonometrică.

O. N T.

941. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\frac{\operatorname{tg}B - 1}{\operatorname{tg}2C - 1} = \frac{\operatorname{tg}B + 1}{\operatorname{tg}2C + 1},$$

ştiind că B *şi* C *sunt unghiurile unui triunghiu dreptunghiu.*

EMILIAN MEREUTA

Aducând ecuaţia dată la forma întreagă şi simplificând, găsim:

$$(1) \qquad \operatorname{tg}B = \operatorname{tg}2C$$

Cum prin ipoteză:

$$B + C = 90°$$

rezultă din ecuaţia (1):

$$B = 2C$$

deci:

$$B = 60°, \qquad C = 30°$$

Observare. Dacă B şi C n'ar fi unghiurile ascuţite ale triunghiului dreptunghic, atunci am pu-

tea avea numai:

$$B = 90,$$

deci:

$$C = A = 45^0.$$

Soluții date de d-nii: *Beral Haim* (Lic. Național, Iași), *Cincilian Agop* (Balcic), *Constantinescu Mircea* (București), *Crivăț I. Vladimir* (bacalaureat, București), *David Moise* (Lic. Național, Iași), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Firoiu Ioan* (Lic., Arad), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București), *Grossu I. Aurel* (Lic., Craiova), *Jeba C-tin* (Șc. Polit., Timișoa a). *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marineanu Traian* (student, București), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanța). *Negrea A. Mircea Leonte* (student, București), *Parepeanu C. I.* (Lic, Brașov), *Pop I. Leontin* (Șc. Polit., Timișoara), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenița), *Purdilă A.* (Lic., Brașov), *Russu D. C-tin* (Lic., Constanța), *Savin C. Ioan* (Șc. Milit. de Artilerie), *Stoicescu Ernest* (Lic Matei Basarab, București), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit, Timișoara), *Vonica C. Ioan* (Șc. Milit. de Artilerie) și *Weissmann Mauriciu* (Lic, Constanța).

Au mai trimes soluțiuni d-nii: *Derenbaum M.* și *Mihaileanu N. N.* (Lic. Constanța).

PROBLEME PROPUSE

980. — Se cere patratul perfect $a\,b\,c\,d\,e\,a$, în care b, d, e, c sunt cifre consecutive descrescătoare în ordinea dată, iar $b\,a$ este patrat perfect.

VLADIMIR I. CRIVATZ

981. — Să se arate că expresia:

$$6391^{2n-1} - 4927^{n+1} + 2925^{n-1}$$

se divide cu 77.

EMILIAN MEREUTA

982. — Să se simplifice fracția:

$$\frac{a^2(b^3-c^3)-b^2(a^3-c^3)+c^2(a^3-b^3)}{a^2(b-c)-b^2(a-c)-c^2(a-c)}$$

V. ALACI

983. — Să se rezolve ecuația:

$$(x+y)(x^2+y^2) = 1157$$

$$(x-y)(x^2-y^2) = 117$$

IOAN CURCHI

984. — Să se construiască un triunghiu ABC înscris într'un cerc dat O, având unghiurile BAC și ABC egale cu două unghiuri date și astfel ca latura AB să treacă printr'un punct dat I. Discuțiune.

OVIDIU ȚINO

985. — Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$, în care AC și BD sunt diagonale și E intersecția laturilor AB, DC.

Să se demonstreze că avem:

$$\overline{DA}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{EC} = \overline{CA}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{ED}\cdot$$

SUB-LT. A. I STAN

986. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^4 x(1+\sin^2 x)+\cos^4 x(1+\cos^2 x) = 1$$

SUBL-LT. C-TIN V. COSTACHESCU

987. — Să se demonstreze că α, β, γ fiind cele trei unghiuri ale unui triunghiu, avem identitățile:

$$\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha = -2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$$

$$\sin^2\gamma+\sin^2\alpha-\sin^2\beta = -2\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma = -2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

A. HOLLINGER

988. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relația:

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{A}{2} & \sin\frac{B}{2} & \sin\frac{C}{2} \\ \frac{a\sin B\sin C}{\sin\frac{A}{2}} & \frac{b\sin C\sin A}{\sin\frac{B}{2}} & \frac{c\sin A\sin B}{\sin\frac{C}{2}} \\ \cos\frac{A}{2} & \cos\frac{B}{2} & \cos\frac{C}{2} \end{vmatrix}$$

ION GH. PUPEZESCU

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii: *F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos* și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu*.

Acei dintre corespondenții noștrii care doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Rugăm a ni se trimete de urgență costul abonamentului pentru „R. M. T." pe anul XI.

ANUL XI. 15 APRILIE 1931 NO. 2.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 VIRGIL CLAUDEAN SISTEME DE ECUATIUNI SI IDENTITATI ALGEBRICE
2. NOTE MATEMATICE: 2, 3, 4
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 899, 910, 918, 925, 933, 955 959, 965
5. PROBLEME PROPUSE: 989-996
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească"

Rugăm a ni se trimete de urgență costul abonamentului pentru „R. M. T." pe anul XI.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 120 lei.
Anul III, broșat, 120 lei.
Anul IV, broșat, 120 lei.
Anul V, broșat, 120 lei.
Anul VI, broșat, 120 lei.
Anul VII, broșat, 120 lei.
Anul VIII, broșat, 120 lei.
Anul IX, broșat 120 lei.
Anul X, broșat 120 lei.

ANUL XI — NO. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1931

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

SISTEME DE ECUAŢIUNI ŞI IDENTITATI ALGEBRICE

de VIRGIL CLAUDIAN

(Urmare)

6. Ţinând seamă acum de valorile necunoscutelor sistemului (1), am dedus identitatea (7′). Ne vom servi acum de ea, pentru a rezolva un nou sistem de ecuaţii şi a deduce alte identităţi algebrice. Să considerăm prinurmare sistemul de ecuaţiuni:

$$(25)\quad \begin{cases} x\dfrac{\lambda_1-a_1}{\lambda_1+a_1}+y\dfrac{\lambda_1-a_2}{\lambda_1+a_2}+z\dfrac{\lambda_1-a_3}{\lambda_1+a_3}-1=0, \\ x\dfrac{\lambda_2-a_1}{\lambda_2+a_1}+y\dfrac{\lambda_2-a_2}{\lambda_2+a_2}+z\dfrac{\lambda_2-a_3}{\lambda_2+a_3}-1=0, \\ x\dfrac{\lambda_3-a_1}{\lambda_3+a_1}+y\dfrac{\lambda_3-a_2}{\lambda_3+a_2}+z\dfrac{\lambda_3-a_3}{\lambda_3+a_3}-1=0, \end{cases}$$

Să considerăm funcţiunea:

$$(26)\quad F(\theta)=x\frac{\theta-a_1}{\theta+a_1}+y\frac{\theta-a_2}{\theta+a_2}+z\frac{\theta-a_3}{\theta+a_3}-1.$$

Se vede imediat, că în virtutea ecuaţiilor sistemului (25), funcţiunea $F(\theta)$ se anulează pentru $\theta=\lambda_1$, $\theta=\lambda_2$ şi $\theta=\lambda_3$. Ţinând seamă de alcătuirea *intrinsecă* a funcţiei $F(\theta)$ deducem:

$$(27)\quad F(\theta)=\frac{(x+y+z-1)(\theta-\lambda_1)(\theta-\lambda_2)(\theta-\lambda_3)}{(\theta+a_1)(\theta+a_2)(\theta+a_3)}$$

Egalând membrii al 2-lea din (26) şi (27); apoi înmulţind deoparte şi de alta cu $\theta+a_1$ şi făcând $\theta=-a_1$, vom găsi valoarea lui x; apoi analog pe y şi z. In definitiv, vom găsi următoarele expresiuni:

$$(28)\quad \begin{cases} x=\dfrac{(x+y+z-1)(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{2a_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)} \\ y=\dfrac{(x+y+z-1)(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{2a_2(a_2-a_3)(a_2-a_1)} \\ z=\dfrac{(x+y+z-1)(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{2a_3(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \end{cases}$$

Facem suma egalităţilor (28) şi avem:

$$x+y+z=(x+y+z-1)\cdot\frac{1}{2a_1a_2a_3}\times$$
$$\Sigma\frac{a_2a_3(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}.$$

Dacă luăm în seamă identitatea (7′) reese:

$$x+y+z=(x+y+z-1)\times$$
$$\left(\frac{a_1a_2a_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)}{2a_1a_2a_3}\right)$$

$$\therefore\quad 2a_1a_2a_3(x+y+z)=(x+y+z)\times$$
$$(a_1a_2a_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)-(a_1a_2a_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$$

$$\therefore\quad x+y+z=-\frac{a_1a_2a_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{a_1a_2a_3-\lambda_1\lambda_2\lambda_3};$$

$$\therefore\quad (29)\qquad x+y+z-1=$$
$$-1-\frac{a_1a_2a_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{a_1a_2a_3-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}=\frac{2a_1a_2a_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3-a_1a_2a_3}$$

Introducând valoarea dela (29) în formulele (28), vom găsi următoarele valori pentru x, y, z:

$$(30)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - a_1a_2a_3}\cdot\dfrac{a_2a_3(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}, \\ y = \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - a_1a_2a_3}\cdot\dfrac{a_3a_1(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)}, \\ z = \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - a_1a_2a_3}\cdot\dfrac{a_1a_2(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}. \end{cases}$$

Dacă identificăm (26) cu (27) avem egalitatea:

$$x(\theta-a_1)(\theta+a_2)(\theta+a_3)+y(\theta+a_1)(\theta-a_2)(\theta+a_3)+$$
$$z(\theta+a_1)(\theta+a_2)(\theta-a_3)-(\theta+a_1)(\theta+a_2)(\theta+a_3)=$$
$$(x+y+z-1)[\theta^3-\theta^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+$$
$$\theta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)-\lambda_1\lambda_2\lambda_3].$$

Din identificarea coeficienților lui θ, deducem:

$$(31)\qquad (a_2+a_3-a_1)x+(a_3+a_1-a_2)y+$$
$$(a_1+a_2-a_3)z=-(x+y+z-1)\times$$
$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+a_1+a_2+a_3;$$

$$(32)\qquad x(a_1a_2+a_1a_3-a_2a_3)+y(a_1a_2+a_2a_3-a_1a_3)+$$
$$z(a_1a_3+a_2a_3-a_1a_2)=-(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)+$$
$$(x+y+z-1)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3).$$

Dacă ne raportăm la valorile (30) și la egalitatea (29) și facem înlocuirile în (31) și (32), apoi efectuăm toate simplificările posibile, deducem identitățile:

$$(31')\qquad \Sigma a_2a_3(a_2+a_3-a_1)\times$$
$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=(a_1+a_2+a_3)\times$$
$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3-a_1a_2a_3)-2a_1a_2a_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3);$$

$$(32')\qquad \Sigma a_2a_3(a_1a_2+a_1a_3-a_2a_3)\times$$
$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=(a_1a_2a_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\times$$
$$(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)-2a_1a_2a_3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3).$$

7. In locul sistemului (25) pot considera un sistem de patru ecuațiuni cu patru necunoscute, pe care rezolvându-l și procedând ca mai sus, voi putea găsi alte identități remarcabile. Evidend că putem considera un sistem de tipul (25) cu mai multe ecuații, în general. Rezolvarea ar fi analoagă.

Dacă adunăm ecuațiile (1) și ținem seamă de valorile (4), mai deducem identitatea:

$$(33)\qquad \Sigma\left(\frac{1}{\lambda_1+a_1}+\frac{1}{\lambda_2+a_1}+\frac{1}{\lambda_3+a_1}\right)\times$$
$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=3.$$

Procedând la fel pentru sistemele (10) și (25), deducem încă identitățile remarcabile:

$$(34)\qquad \Sigma\left(\frac{1}{\lambda_1+a_1}+\frac{1}{\lambda_2+a_1}+\frac{1}{\lambda_3+a_1}+\frac{1}{\lambda_4+a_1}\right)\times$$
$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_1+\lambda_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}=4.$$

$$(35)\qquad \Sigma\left(\frac{\lambda_1-a_1}{\lambda_1+a_1}+\frac{\lambda_2-a_1}{\lambda_2+a_1}+\frac{\lambda_3-a_1}{\lambda_3+a_1}\right)\times$$
$$\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)a_2a_3}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=3(\lambda_1\lambda_2\lambda_3-a_1a_2a_3)$$

8. Dacă în locul sistemelor (1) și (10) considerăm un sistem de n ecuații, cu n necunoscute, dar de acelaș tip, vom găsi valorile necunoscutelor prin același procedeu ca mai sus. Pe dealtă parte, determinantul necunoscutelor unui asemenea sistem general, are o valoare cunoscută (*Polya* und *Szegő. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Band II, p. 98, 3,*) valoarea care dealtfel se și poate găsi ușor. Vom putea dar deduce valoarea determinatului:

$$(36)\qquad \Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_1+a_1} & \frac{1}{\lambda_1+a_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1+a_{n-1}} \\ 1 & \frac{1}{\lambda_2+a_1} & \frac{1}{\lambda_2+a_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+a_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{\lambda_n+a_1} & \frac{1}{\lambda_n+a_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+a_{n-1}} \end{vmatrix}$$

Determinantul (36) a fost propus, de *Traian Lalescu,* în anul 1922, la seminarul de Algebră dela Bucureşti.

Sistemul (25) ne-ar conduce la a cerceta determinantul:

$$(37)\quad D_n = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1 - a_1}{\lambda_1 + a_1} & \frac{\lambda_1 - a_2}{\lambda_1 + a_2} & \dots & \frac{\lambda_1 - a_n}{\lambda_1 + a_n} \\ \frac{\lambda_2 - a_1}{\lambda_2 + a_1} & \frac{\lambda_2 - a_2}{\lambda_2 + a_2} & \dots & \frac{\lambda_2 - a_n}{\lambda_2 + a_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{\lambda_n - a_1}{\lambda_n + a_1} & \frac{\lambda_n - a_2}{\lambda_n + a_2} & \dots & \frac{\lambda_n - a_n}{\lambda_n + a_n} \end{vmatrix}.$$

Mă opresc cu cercetarea rezultatelor, în ordinea de idei anunţată. Cu altă ocazie, voi avea prilejul să mă ocup de alte chestiuni interesante de aceiaşi natură.

NOTE MATEMATICE

2. — *Asupra unei relaţii.*

In *„Recueil de problèmes Mathématiques"* par *C. A. Laisant,* există următoarea problemă indicată ca nesoluţionată.

M fiind un punct arbitrar pe ipotenuza BC a unui triunghiu dreptunghiu ABC, să se stabilească relaţia:

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 \cdot \overline{MB}^2 = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AM}^2$$

(*Van Aubel*)

Problema aceasta a fost soluţionată într'un mod simplu în articolul: *„Relaţii metrice deduse cu ajutorul inversiunei"* (R. M. T. No. 11, an. X), de d-l *Cezar Coşniţă,* pe calea inversiunei. In cele ce urmează voiu da o soluţie directă.

Aplic relaţia lui *Stewart* sistemului de puncte (A, B, C, M):

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{MC} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{MB} = \overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{CM}$$

Inmulţesc această relaţie întâi cu $\overline{MC}$ şi apoi cu $\overline{MB}$; adunând rezultatele astfel obţinute se are:

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 \cdot \overline{MB}^2 = \overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{MC} +$$
$$\overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{MB} - \overline{AC}^2 \cdot \overline{MB} \cdot \overline{MC} -$$
$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{CM}^2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{MB} + \overline{BM}^2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{MC} =$$
$$\overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} \cdot [\overline{MC} + \overline{MB}] - \overline{MB} \cdot \overline{MC} [\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2] +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{BC} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{MC} [\overline{BM} + \overline{MC}] =$$
$$\overline{AM}^2 \cdot \overline{BC}^2 - \overline{BC}^2 \cdot \overline{MB} \cdot \overline{MC} +$$
$$\overline{BC}^2 \cdot \overline{MC} \cdot \overline{MB} = \overline{AM}^2 \cdot \overline{BC}^2$$

In concluzie relaţia aceasta a lui *Van Aubel* o putem considera ca o relaţie *Stewart* pentru triunghiul dreptunghic[1].

ALEXANDRU NICULESCU

3. — *O scurtă privire asupra istoricului semnelor algebrice.*

In cele ce urmează voiu căuta a face un scurt istoric al semnelor şi simbolurilor algebrice, arătând pe cât mai exact posibil originea lor. M-am folosit pentru aceasta în special de valoroasa lucrare a D-lui *C. Wargny* (Chili) — *„Historia de las matematicas"* şi apoi de alte lucrări analoage.

Din cele mai vechi timpuri, odată cu primele începuturi de civilizaţie s'au arătat primele începuturi ale matematicilor, care apoi devenind scrise, aveau nevoie de diferite semne şi simbole, aceste semne şi simbole au variat însă dela un popor la altul, fiind într'o continuă schimbare. Cel mai vechiu document cunoscut până acum este cel dela *Rhind* (Egipt), care este scris pe un papirus care are o vechime de mai multe mii de ani înainte de Christos. Indienii apoi Grecii şi Fenicienii au făcut ca matematicile să progreseze foarte mult. Să vedem acum cum au ajuns semnele algebrice pe care le întrebuinţăm azi să fie cum sunt.

Adunarea. Grecii şi indienii indicau la început această operaţie prin scrierea termenilor unul lângă altul. Urmele acestea se mai văd însă şi în matematicile moderne, aşa $7^1/_2 = 7 + \frac{1}{2}$. Mai târziu matematicienii italieni se foloseau de litera *p*, prima literă dela *plus*, aşa $5\,p\,2 = 5 + 2$ Pela 1550 *Tartaglia* se folosea de Φ. Primii însfârşit cari se folosesc de semnul actual + sunt anglo-

[1]) *Nota Redacţiei.* S'a primit la Redacţie Nota Matematică a d-lui profesor *Alexandru Niculescu,* înainte de a apărea în No. 1. an XI, nota d-lui *Colonel Gh. Buiclíu.*

saxonii, aceştia însă îl întrebuinţau nu ca semn al adunărei ci ca semn al excesului — De abia în sec. XVII pela 1630, semnul + trece ca semn al operaţiunei adunări aşa cum îl avem azi.

Scăderea, Diofant o însemna prin ψ, indienii printr'un punct, italienii prin analogie cu adunarea prin *m* dela „minus" *Paccioli* îl întrebuinţează când pe *m* când pe *„de"* dela *demptus.* Iar anglo-saxonii îl întrebuinţau pe — ca „signum sustractorum". Semnul + provine probabil din — la care se punea o verticală ⊥ şi devenind cu vremea +. De altfel semnele nu aveau aceeaşi semnificare în toate părţile, ele fiind cu totul locale. Aşa *Tartaglia* întrebuinţa pe — pentru a indica o împărţire astfel $a : b$ pentru el era $a - b$. Pe când *Van Schooten* scria diferenţa între *a* şi *b* prin $a = b$. Semnul — ca semn al operaţiunei îl găsim tot pela 1630.

Inmulţirea, Oughtred o însemna prin ×, *Harriot* printr'un punct şi abia mai târziu *Descartes* o însemnă prin scrierea, pur şi simplu, a termenilor unul lângă altul. Toate aceste 3 forme se păstrează şi astăzi.

Impărţirea. Arabii scriau fracţiile ordinare subt formele : $a - b$, a/b şi $\frac{a}{b}$ *Oughtred* o însemna printr'un punct la început şi apoi tot el în *„Canones Sinuum"* (1657), o înseamna pentru prima oară în istoria matematicilor prin două puncte aşa cum o avem şi noi azi. Câţiva ani mai târziu pela 1668 *Rahn de Zürich* şi *I. Pell* din Londra întrebuinţau ÷ ca semn al diviziunei, iar *Barron* o însemna prin : :

Din acestea se vede că cele patru semne ale operaţiunilor fundamentale au căpătat forma pe care o au azi în sec. XVI. printre anii 1630—1657.

Să fac acum istoricul celorlalte semne algebrice ; caracteristica acestor din urmă, este că ele n'au evoluat aşa de mult ca cele dintâiu, ci au căpătat relativ, dela început o formă fixă.

Semnul egalităţii apare pentru prima oară în 1557 precum apare şi semnul || cu aceiaş semnificare pela 1575. Până pe la *Newton* se mai scria izolat pe ici pe colo, de către unii matematicieni semnul α provenit din *aequalis* însă această notaţie dispare complect în timpul vieţei lui *Newton.*

La 1631 *Harriot* introduce *semnele de inegalitate* $>$ şi $<$, până la el matematicienii întrebuinţau notaţiunea I_ şi _I pentru „mai mic" şi „mai mare". Semnele $\neq$ şi $\gtrless$ sunt notaţii recente.

Parantezele au fost introduse în matematici de *Girard* la 1629.

Cristofor Rudolf întrebuinţează pentru prima oară semnul $\sqrt{\ }$ ca derivat din *r* dela *„racina"* Rădăcina patrată o însemna prin $\sqrt{\ }\sqrt{\ }$ iar pe cea cubică prin $\sqrt{\ }\sqrt{\ }\sqrt{\ }$. Notaţia $\sqrt[k]{\ }$ este mai recentă.

Puterile unui număr se însemnau şi ele în mod diferit astfel *Bombelli* (1572) însemna : $\underset{\smile}{1}$, $\underset{\smile}{2}$, $\underset{\smile}{3}$, pentru *a*, a^2, a^3. *Stewin* la 1586 se foloseşte de notaţiunea ① ② ③ şi-i important că el introduce primii coeficenţi fractionari. De asemenea *Viete* 1591 scria : A, Aqud, Acub pentru *a*, a^2, a^3. La la 1643 găsim scriindu-se astfel : *a*, *a*2, *a*3, şi în-fine *Descartes* e acela care are meritul de a fi întrodus notaţiunea *a*, a^2, a^3 şi tot el îşi imaginează şi exponenţii imaginari. Iar *Leibnitz* se foloseşte de termenul general de gradul *n.*

Semnul ∞ pentru „infinit" e luat probabil dintr'un număr puţin diferit ca formă şi care la romani însemna 1000, de aici probabil însemnând o cantitate mare, a devenit semn, cu vremea, al unei cantităţi infinit de mari. Se găseşte ca semn al infinutului în lucrarea lui *Wallis „Aritmetica infinitorum"* apărută la 1655, şi în *„ars Cogitandi"* (1713) a lui *I. Bernoulli. Notaţia* $\sqrt{-1} = i$ se atribuie lui *Euler. In trigonometrie* numirea de *sinus* e foarte veche şi e probabil de origină arabă. *Fink* (1561—1646) indroduce numirea de *tangentă* şi *secantă. Retico* (1596) de *cosecantă. Gunter* de *cosinus* şi *cotangentă.* Notaţiunea definitivă în trigonometrie e dată de asemeni de *Euler.*

Diviziunea sexazecimală a cercului ne vine dela Babiloneni, prin intermediul grecilor. Unitatea de măsură a babilonenilor era *„trisogonul"* un unghiu de 60°, care era divizat în 60 părţi egale şi aceste diviziuni la rândul lor împărţite în alte 60 părţi, etc. Se crede de către unii că această diviziune ar corespunde împărţirei boltei cereşti de către ei în 60 părţi egale care ar fi corespuns mai mult sau mai puţin celor 365 zile ale anului.

Sistemul zecimal de numeraţie şi numerele 0, 1, 2, ... sunt de origină arabă. Sistemul zicimal a fost introdus în Europa de către *Leonardo de Pisa (Fibonacci)* prin sec. XII şi a prins imediat rădăcini destul de solide, căci prin sec. XIII îl găsim întrebuinţat în comerţ şi în transacţii.

Cu notaţiile şi simbolele matematice s'a ocupat acum de curând *Peanno* care urmărea să prescurteze actualele notaţii şi să formeze o scriere matematică *„idioformă"*, având ca scop formarea unei limbi matematice universală. Nu cunosc rezultatele la care a ajuns, chestiunea fiind destul de dificilă întrucât îngreuiază „aridul" studiu al matematicilor.

† Tr. A. Dordea

4. — *Dreapta lui Euler în funcţie de înălţimi şi de razele cercurilor exinscrise.*

Pentru ca să exprimăm dreapta lui *Euler* în funcţie de înălţimi şi de razele cercurilor exînscrise vom pleca dela formula cunoscută:

$$(1) \qquad \overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

1°. Din:

$$a = \frac{2S}{h_a}; \quad b = \frac{2S}{h_b}; \quad c = \frac{2S}{h_c};$$

$$S^2 = \frac{h_a^4 h_b^4 h_c^4}{(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)}$$

deducem:

$$a^2 = \frac{4 h_a^2 h_b^4 h_c^4}{(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)}$$

$$b^2 = \frac{4 h_a^4 h_b^2 h_c^4}{(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)}$$

$$c^2 = \frac{4 h_a^4 h_b^4 h_c^2}{(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)}$$

De unde avem:

$$\Sigma a^2 = \frac{4 h_a^2 h_b^2 h_c^2 (h_b^2 h_c^2 + h_c^2 h_a^2 + h_a^2 h_b^2)}{(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)}$$

Inlocuind în (1) pe Σa^2, avem:

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - \frac{4 h_a^2 h_b^2 h_c^2 (h_b^2 h_c^2 + h_c^2 h_a^2 + h_a^2 h_b^2)}{(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)}$$

în care înlocuind pe:

$$R^2 = \frac{4 h_a^6 h_b^6 h_c^6}{(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a)^2 \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_a h_c)}$$

$$\overline{OH}^2 = \frac{4 h_a^2 h_b^2 h_c^2 [9 h_a^4 h_b^4 h_c^4 - \Sigma h_a^2 h_b^2 \Sigma h_a h_b . \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)]}{(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a)^2 \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)^2}$$

$$\therefore \quad OH = \frac{2 h_a h_b h_c}{\Sigma h_a h_b \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)} \times \sqrt{9 h_a^4 h_b^4 h_c^4 - \Sigma h_a^2 h_b^2 \Pi (h_a h_b + h_b h_c - h_c h_a)}$$

2°. Din:

$$a = \frac{r_a (r_b r_c)}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}; \text{ etc}; \quad R = \frac{(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c)}{4 \Sigma r_a r_b}$$

deducem:

$$a^2 = \frac{r_a^2 (r_b + r_c)^2}{\Sigma r_a r_b}; \text{etc}; \quad R^2 = \frac{(r_a + r_b)^2 (r_a + r_c)^2 (r_b + r_c)^2}{16 (r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)^3}$$

$$\Sigma a^2 = \frac{\Sigma r_a^2 (r_b + r_c)}{\Sigma r_a r_b}$$

Inlocuind în (1), avem:

$$\overline{OH}^2 = \frac{9 (r_a + r_b)^2 (r_b + r_c)^2 (r_c + r_a)^2}{16 (r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)^2} - \frac{\Sigma r_a^2 (r_b + r_c)^2}{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}$$

$$\therefore \quad \overline{OH}^2 = \frac{9 (r_a + r_b)^2 (r_b + r_c)^2 (r_c + r_a)^2 - 16 \Sigma r_a r_b . \Sigma r_a^2 (r_b + r_c)^2}{16 (r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)^2}$$

$$\therefore \quad \overline{OH} = \frac{\sqrt{9 (r_a + r_b)^2 (r_b + r_c)^2 (r_c + r_a)^2 - 16 \Sigma r_a r_b \Sigma r_a^2 (r_b + r_c)^2}}{4 \Sigma r_a r_b}$$

Ioan Gh. Popa

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVI, No. 7, Martie 1931. Sur trois triangles homotétiques, par *V. Thébault*. Asupra unor relaţiuni metrice, de *Şerban A. Gheorghiu*. Asupra rezolvării ecuaţiunei $A x^2 + B y^2 = C z^2$, în numere întregi, de *Ioan B. Florescu*. Hipocicloida cu trei rebrusmente ortopolul, de Lt. *Mihail I. Focşăneanu*.

2. *Boletin Matematico*, anul III, Decembrie 1930. Asupra însemnătăţii filosofice a *Elementelor lui Euclides*, de *R. O. Zaharia*. (Tradus din Revista Matematică, an X, No. 11). O teoremă de B. I. B. (Notă).

3. *Radu Badescu*. Singularités des solutions d'une classe d'équation intégrale. (Estratto dal, Rendiconti della R. Academia Nazionale dei Lincei, vol XII, agosto 1930).

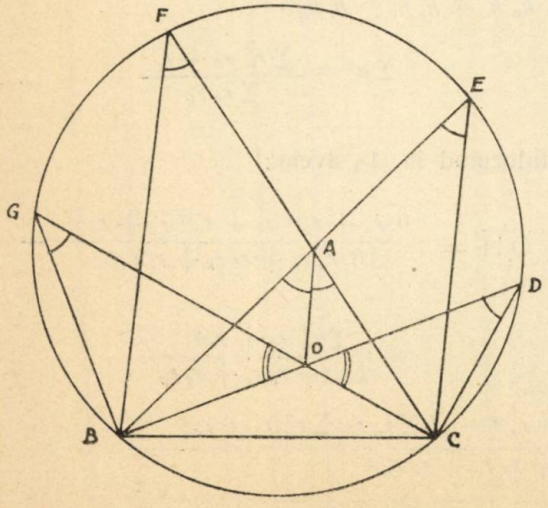
4. *Radu Badescu*. Sur une équation fonctionnelle. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 191, 1930).

PROBLEME REZOLVATE

899. — *Fie un triunghiu* A B C *şi* D, G *intersecţiile bisectoarelor interioare şi exterioare a unghiului* B, *respectiv cu bisectoarele exterioare şi interioare a unghiului* C. *Fie* E *şi* F *intersecţiile laturilor* A B *şi* A C *respectiv cu paralele duse la bisectoarea unghiului* A, *prin* C *şi* B. *Să se demonstreze că punctele* B, C, D, E, F, G *sunt pe acelaşi cerc.*

LT.-COL O. BUGEANU

Construim figura în condiţiile problemei. Fie O punctul de întâlnire al bisectoarelor interioare triunghiului A B C.



Dreptele C E şi B F fiind paralele cu O A, rezultă:

$$(1) \qquad \widehat{E} = \widehat{F} = \frac{\widehat{A}}{2}$$

Observăm apoi că triunghiurile C O D şi B O G au câte două unghiuri respectiv egale, anume:

$$\widehat{C} = \widehat{B} = 90^0$$

fiind fiecare format din bisectoarele a două unghiuri adiacente suplimentare din C şi B, apoi:

$$\widehat{COD} = \widehat{BOG}$$

ca opuse la vârf. Rezultă atunci din triunghiurile considerate:

$$(2) \qquad \widehat{D} = \widehat{G}$$

Dar:

$$(3) \qquad \widehat{D} + \widehat{COD} = 90^0$$

şi unghiul C O D fiind exterior în triunghiul B O C, avem:

$$\widehat{COD} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$$

Cum:

$$\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 90^0 - \frac{\widehat{A}}{2}$$

rezultă din (3):

$$(4) \qquad \widehat{D} = \frac{\widehat{A}}{2}$$

Din egalităţile (1), (2) şi (4), rezultă:

$$\widehat{D} = \widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{G}$$

Cum laturile fiecăruia din aceste unghiuri trec respectiv prin B şi C, rezultă că aceste unghiuri egale sunt însrise in acelaşi segment de cerc, ce trece prin B şi C. Aşa dar, punctele B, C, D, E, F, G sunt pe acelaşi cerc.

Soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (Lic. Milit, Iaşi), *Antonescu P. Aurel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Băcicov Boris* (student, Iaşi), *Bujoreanu Vicenţiu* (Şc. Milit, de Geniu), *Crivăţ I. Vladimir* (bacalaureat, Bucureşti), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Şc. Polit., Bucureşti), *Dimitrin At. Ion* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ghişoiu I. Petre* (Şc, Polit., Bucureşti). *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Olte-

niţa), *Pupezescu Gh. Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Russu D. C-tin* (Constanţa), *Rusu Savin*, *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iaşi), *Vasu Vasile* şi *Velicescu Gh. Titu* (Muscel).

910. — C_n^i *fiind simbolul combinărilor de n obiecte luate câte i, să se stabilească identităţile:*

$$\sum_{i=0}^{k} C_{n+1}^i - C_n^k = 2 \sum_{i=1}^{k} C_n^{i-1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} C_{2m-1}^{m-i} + C_{2m-k}^m = \sum_{i=0}^{m} (C_m^i)^2$$

I. MURAROIU

Din formula cunoscută:

$$C_{n+1}^i = C_n^i + C_n^{i-1} \tag{1}$$

deducem succesiv:

$$\sum_{i=0}^{k} C_{n+1}^i = \sum_{i=0}^{k} C_n^i + \sum_{i=1}^{k} C_n^{i-1} =$$

$$(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k) + (C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{k-1}) = 2(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{k-1}) + C_n^k$$

aci deducem:

$$\sum_{i=0}^{k} C_{n+1}^i - C_n^k = 2 \sum_{i=1}^{k} C_n^{i-1}$$

Avem astfel stabilită prima identitate.

Pentru a stabili a 2-a identitate folosim relaţia cunoscută care ne dă suma patratelor coeficienţilor binomului lui *Newton*, anume:

$$C_{2m}^m = (C_m^0)^2 + (C_m^1)^2 + \ldots + (C_m^m)^2 = \sum_{i=0}^{m} (C_m^i)^2 \tag{2}$$

Pe de altă parte în virtutea relaţiei (1), putem scri relaţiile:

$$C_{2m}^m = C_{2m-1}^m + C_{2m-1}^{m-1}$$

$$C_{2m-1}^m = C_{2m-2}^m + C_{2m-2}^{m-1}$$

$$C_{2m-2}^m = C_{2m-3}^m + C_{2m-3}^{m-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{2m-k+1}^m = C_{2m-k}^m + C_{2m-k}^{m-1}$$

Adunând aceste relaţii şi simplificând, avem:

$$C_{2m}^m = C_{2m-1}^{m-1} + C_{2m-1}^{m-1} + \ldots + C_{2m-k}^{m-1} +$$

$$C_{2m-k}^m = \sum_{i=1}^{k} C_{2m-k}^{m-1} + C_{2m-k}^m$$

Inlocuind această valoare a lui C_{2m}^m în relaţia 2-a, avem:

$$\sum_{i=1}^{k} C_{2m-i}^{m-1} + C_{2m-k}^m = \sum_{i=0}^{m} (C_m^i)^2$$

A 2-a identitate este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Ghilezan Aurel* (Şc. Polit. Timişoara), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit. Bucureşti), *Mihaileanu N.* (Lic. Constanţa) şi *Vasu Vasilie*.

918. — *Să se rezolve ecuaţiile:*

$$f(x) = x^2 \sin 2\alpha_1 - 2x \sin(\alpha_1 + \alpha) + \sin 2\alpha = 0$$

$$f_1(x) = x^2 \cos 2\alpha_1 - 2x \cos(\alpha_1 + \alpha) + \cos 2\alpha = 0$$

$$f(x) + f_1(x) = 0,$$

unde α *şi* α_1 *sunt două arce cunoscute. Să se determine* α_1 *şi* α, *în cazul când prima ecuaţie are rădăcinele* $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}$.

V. ALACI

1. Rădăcinele primei ecuaţii de gradul al 2-lea, sunt:

$$x = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha) \pm \sqrt{\sin^2(\alpha_1 + \alpha) - \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha}}{\sin 2\alpha_1}$$

Observând că avem:

$$\sin^2(\alpha_1 + \alpha) - \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha = (\sin\alpha_1 \cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha_1)^2 - 4 \sin\alpha_1 \sin\alpha \cos\alpha_1 \cos\alpha =$$

$$\sin^2\alpha_1 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha_1 - 2 \sin\alpha_1 \sin\alpha \cos\alpha_1 \cos\alpha = (\sin\alpha_1 \cos\alpha - \sin\alpha \cos\alpha_1)^2 = \sin^2(\alpha_1 - \alpha),$$

rezultă:

$$x = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha) \pm \sin(\alpha_1 - \alpha)}{\sin 2\alpha_1}$$

De aci deducem:

$$x_1 = \frac{2 \sin\alpha_1 \cos\alpha}{2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1},$$

$$x_2 = \frac{2 \sin\alpha \cos\alpha_1}{2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$

Rădăcinele ecuației, $f(x)=0$, sunt astfel:

$$x_1=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1},\qquad x_2=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$

2. Rădăcinele ecuației $f_1(x)=0$, se pot afla în mod analog ca și pentru prima ecuație. Intrebuințăm însă o altă metodă. Observăm ușor că dacă în prima ecuație $f(x)=0$, înlocuim arcele α_1 și α respectiv prin $\alpha_1+\frac{\pi}{4}$ și $\alpha+\frac{\pi}{4}$, obținem:

$$x^2\sin\left(2\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)-2x\sin\left(\alpha_1+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

sau:

$$x^2\cos 2\alpha_1-2x\cos(\alpha_1+\alpha)+\cos 2\alpha=0,$$

adică tocmai ecuația $f_1(x)=0$.

Rezultă de aci că și rădăcinele ecuației $f_1(x)=0$, se obțin din rădăcinele ecuației $f(x)=0$, substituind α_1 și α respectiv prin $\alpha_1+\frac{\pi}{4}$ și $\alpha+\frac{\pi}{4}$, deci rădăcinele ecuației $f_1(x)=0$, sunt:

$$x_1=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)},\qquad x_2=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)}$$

3. Să rezolvăm acum și ecuația:

$$f(x)+f_1(x)=0,$$

adică:

$$x^2(\sin 2\alpha_1+\cos 2\alpha_1)-2x[\sin(\alpha_1+\alpha)+\cos(\alpha_1+\alpha)]+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=0$$

Ținând seamă de formula cunoscută:

$$\sin p+\cos p=\sin p+\sin\left(p+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(p+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}$$

ecuația de mai sus se poate scri, simplificând cu $2\cos\frac{\pi}{4}$:

$$x^2\sin\left(2\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)-2x\sin\left(\alpha_1+\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Observăm și aci, că această ecuație se poate obține din ecuația $f(x)=0$, substituind arcele α_1 și α respectiv prin $\alpha_1+\frac{\pi}{8}$ și $\alpha+\frac{\pi}{8}$. Atunci rezultă că și rădăcinele ecuației $f(x)+f_1(x)=0$, se obțin din rădăcinele ecuației $f(x)=0$, prin aceiași substituție. In consecință deducem că rădăcinele ecuației $f(x)+f_1(x)=0$, sunt:

$$x_1=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\alpha_1+\frac{\pi}{8}\right)},\qquad x_2=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{8}\right)}$$

4. Să determinăm acum arcele α_1 și α în caz când rădăcinele ecuației $f(x)=0$, sunt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Arcele α_1 și α trebuie să satisfacă unul din sistemele de ecuații:

$$(1)\begin{cases}\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\[2ex]\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\[2ex]\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Primul sistem se poate scri:

$$\begin{cases}\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha_1\\[2ex]\sin^2\alpha=\dfrac{3}{2}\sin^2\alpha_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\cos^2\alpha_1\end{cases}$$

Adunând aceste relații avem:

$$1=\frac{3}{2}-\cos^2\alpha_1$$

$$\therefore\qquad \cos\alpha_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\text{ și deci }\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$$

De aci deducem:

$$(3)\qquad\begin{cases}\alpha_1=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}\\[2ex]\alpha=2k_1\pi\pm\dfrac{\pi}{3}\end{cases},$$

k și k_1 luând una din valorile $0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Pentru a rezolvi sistemul (2), observăm că dacă în sistemul (1) înlocuim α și α_1 prin $\alpha+\frac{\pi}{2}$ și

$\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, obţinem sistemul (2'), deci şi soluţiile sistemului (2) se obţin prin aceiaşi substituţie din soluţiile (3) ale sistemului (1). Sistemul (2), ne dă deci pentru α_1 şi α valorile:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k_1\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

k şi k având valorile 0, ± 1, ± 2, ..

Soluţii mai puţin simple, date de d-nii: *Bâcicov Boris* (student, Iaşi), *Bâcicov P. Victor* (student, Iaşi), *Codreş I. Floriau*, *Crivăţ I. Vladimir* (bacalaureat, Bucureşti), *Cuciureanu Ştefan* (Lic. Milit., Iaşi), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Bucureşti), *Ghilezan A. Aurel* (Şc. Polit., Timişoara), *Jeba C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu N.* Lic., Constanţa), *Popa Gh. Ion* (Oltenita), *Pupezescu Gh. Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Russu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Savin C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), *Velicescu N. Nicolae-Muscel* şi *Velicescu Gh. Titu.*

925. — *Înălţimele triunghiului isoscel* A B C ($\hat{A} = \hat{B}$) *se întâlnesc în* M; *punctele de contact ale acestor înălţimi, cu laturile opuse, sunt* D, E, O. *Se prelungeşte* C O *cu cantitatea* C F = M O. *Să se arate că:*

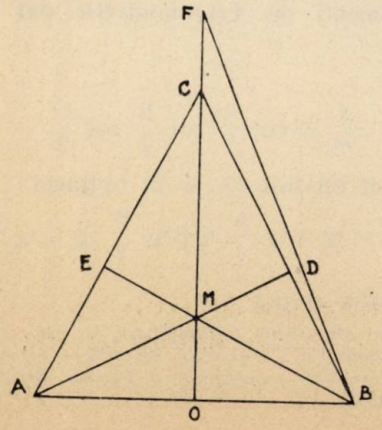
1°. $$\frac{\overline{BM}\cdot\overline{BE}}{\overline{MO}\cdot\overline{CO}} = 2$$

2°. $$\overline{BM}^2 = \overline{OF}\cdot\overline{OM}$$

3°. $$\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{BO}^2$$

ION MARGINEANU

Construim figura în condiţiile problemei.



1°. Triunghiurile dreptunghice O B M şi E A B fiind asemenea, putem scri proporţionalitatea laturilor omoloage, anume:

(1) $$\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{BE}},$$

şi cum, $\overline{AB} = 2\overline{BO}$, rezultă din (1):

(2) $$\overline{BM}\cdot\overline{BE} = 2\overline{BO}^2$$

Tot astfel observăm că triunghiurile dreptunghice O B M şi A O C sunt asemenea, rezultă deci:

(3) $$\frac{\overline{MO}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{CO}}$$

şi cum, $\overline{AO} = \overline{BO}$, deducem din (3):

(4) $$\overline{MO}\cdot\overline{CO}\cdot = \overline{BO}^2$$

Impărţind relaţiile (2) şi (4), obţinem:

$$\frac{\overline{BM}\cdot\overline{BE}}{\overline{MO}\cdot\overline{CO}} = 2$$

2°. Din triunghiul dreptunghic O B M, deducem:

(5) $$\overline{BM}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{MO}^2$$

Ţinând seamă de (4) deducem din (5):

(6) $\overline{BM}^2 = \overline{MO}\cdot\overline{CO} + \overline{MO}^2 = (\overline{CO} + \overline{MO})\cdot\overline{MO}$

Cum, $\overline{MO} = \overline{CF}$, rezultă din (6) privind figura:

$$\overline{BM}^2 = \overline{OF}\cdot\overline{OM}$$

3°. In triunghiul dreptunghic O B F, avem:

(7) $$\overline{BF}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OB}^2$$

Putem scri încă succesiv, observând figura şi relaţia (4):

$$\overline{OF}^2 = (\overline{CO} + \overline{MO})^2 = \overline{CO}^2 + \overline{MO}^2 +$$

$$2\overline{MO}\cdot\overline{CO} = \overline{CO}^2 + \overline{MO}^2 + 2\overline{BO}^2 =$$

$$(\overline{CO}^2 + \overline{BO}^2) + (\overline{MO}^2 + \overline{BO}^2) = \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2$$

Inlocuind în (7) pe $\overline{FO}^2$ cu valoarea găsită, obţinem:

$$\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{BO}^2.$$

Soluţii anoloage date de d-nii: *Bâcicov Boris* (student, Iaşi), *Grossu I. Aurel* (Lic. Carol, Craiova), *Lupescu Gh.*

C. (Lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Negrea A. Mircea-Leonte* (student, Bucureşti), *Parepeanu C. I.* (Braşov) şi *Purdilă A.* (Braşov).

Au dat soluţii trigonometrice, d-nii: *Mihăileanu N.* (Lic. Constanţa) şi *Rusu D. C-tin* (Lic. Constanţa).

A dat o soluţie analitică, d-nul: *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit., Bucureşti).

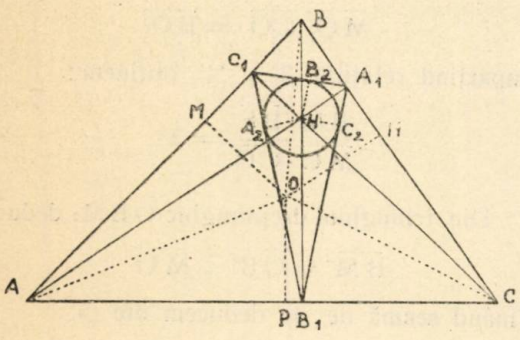
933. — *Se notează cu* s, s_1 *şi* r, r_1 *ariile şi razele cercurilor înscrise triunghiului* ABC *şi triunghiului său ortic* $A_1B_1C_1$.

Să se stabilească relaţia:

$$\frac{s_1 r^2}{s r_1^2} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} B \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} C \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

C-TIN IONESCU-BUJOR

Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi fiind-că în un triunghiu înălţimele ştim că sunt bisectoa-



rele triunghiului său ortic, rezultă că:

$$HA_2 = HB_2 = HC_2 = r_1$$

Observăm apoi, că:

$$\sphericalangle A_2 H C_1 = \sphericalangle C,$$

având supliment $\sphericalangle A C_1 B_1$, analog:

$$\sphericalangle A_2 H B_1 = \sphericalangle B$$

In triunghiurile dreptunghice HA_1C_1 şi HA_2B_1 avem:

$$\frac{A_2 C_1}{A_2 H} = \operatorname{tg} C, \qquad \frac{A_2 B_1}{A_2 H} = \operatorname{tg} B$$

Adunând, avem:

$$(1) \qquad \frac{B_1 C_1}{r_1} = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$$

Observăm apoi că:

$$(2)\ s_1 = \text{aria}\,(C_1 H B_1) + \text{aria}\,(C_1 H A_1) + \text{aria}\,(A_1 H B_1)$$

$$= \frac{B_1 C_1 \times r_1}{2} + \frac{C_1 A_1 \times r_1}{2} + \frac{A_1 B_1 \times r_1}{2}$$

Relaţia (2), ţinând seamă de (1), devine:

$$s_1 = r_1^2 (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) = r_1^2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

căci:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

(Compléments de Trigonométrie par F. G. M, pag. 69).

Deci:

$$(3) \qquad \frac{s_1}{r_1^2} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

In triunghiul ABC, în care O este punctul de întâlnire al bisectoarelor, şi $OM = ON = OP = r$, putem scri:

$$(4) \qquad s = \frac{AB \times r}{2} + \frac{BC \times r}{2} + \frac{AC \times r}{2} =$$

$$r \frac{AB + BC + AC}{2}$$

Cum:

$$AB = AM + MB = r\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}\right)$$

$$BC = r\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right)$$

$$AC = r\left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}\right),$$

înlocuind în (4), avem:

$$s = r^2\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right)$$

Dar ştim că:

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

(Compléments de Trigonométrie par F. G M, pag. 71),

astfel că:

$$(5) \qquad \frac{s}{r^2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

Impărţind relaţiile (3) şi (5) obţinem:

$$\frac{s_1 r^2}{s r_1^2} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} B \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} C \operatorname{tg} \frac{C}{2},$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Mihăileanu N.* (Lic. Constanţa) *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic. Constanţa) şi *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit., Timişoara).

955. — *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2-2xyz=5 \\ x^2y+x^2z+xy^2+zy^2+xz^2+yz^2+3xyz=98 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Ecuaţia 3-a se poate scri:

$$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+3xyz=98$$

Ţinând seamă de prima ecuaţie, avem:

$$xy(7-z)+xz(7-y)+yz(7-x)+3xyz=98$$

$$\therefore \quad (1) \qquad xy+xz+yz=14$$

Ecuaţia a 2-a a sistemului se poate scri:

$$(2) \quad (x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)-2xyz=5$$

Ţinând seamă de prima ecuaţie a sistemului şi de ecuaţia (1), ecuaţia (2) devine:

$$49-28-2xyz=5$$

$$\therefore \qquad xyz=8$$

Sistemul dat este deci echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ xy+yz+zx=14 \\ xyz=8 \end{cases}$$

Aceste ecuaţii scriu suma a trei numere, suma produselor lor luate câte două şi produsul lor, rezultă că aceste numere sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$t^3-7t^2+14t-8=0,$$

care se mai poate scri:

$$(t-1)(t-2)(t-4)=0$$

Sistemele de soluţiuni ale sistemului dat, sunt:

x	1	1	2	2	4	4
y	2	4	1	4	1	2
z	4	2	4	1	2	1

Soluţii date de d-nii: *Băleanu N.* (Lic. Milit., Craiova), *Beral Haim* (Lic.. Naţional, Iaşi), *Cincilian Agop* (Balcic), *Chivu S. I.* (Lic. Milit., Craiova), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Fodorac Vasilc* (Lic. Milit., Chişinău), *Grinberg N. Meer* (Lic., Tighina), *Iliescu M. Emilian* (Lic. Milit., Craiova), *Lascu C. Ioan* (Lic. Milit., Craiova), *Jeba C. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara) *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mereuţa Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Motoc O. Mircea* (Lic., Olteniţa), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Nicolaescu Ştelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Parepeanu C. Ion* (Lic., Braşov), *Pascaru L. I.* (Lic, Naţional, Iaşi), *Pănoiu I. Emanoil* (Lic. Carol, Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Olteniţa), *Popescu C. Ştefan* (Lic. Milit., Craiova), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Ţiucra P. Mircea* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanţa).

959. — *Să se stabilească identitatea:*

$$b(a-c)\frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}}+\frac{cp(r_a-r)}{r_a}=\frac{bc(h_a+h_b+h_c)}{h_a}$$

EMILIAN MEREUTA

Insemnând cu E primul membrul şi ţinând seamă de relaţiile cunoscute într'un triunghiu:

$$\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}=\frac{a-c}{a+c}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{a-c}{a+c}\operatorname{tg}\frac{A+C}{2},$$

$$r=\frac{s}{p}, \qquad r_a=\frac{s}{p-a},$$

putem scri succesiv:

$$E=b(a-c)\frac{a+c}{a-c}+cp-cp\cdot\frac{\frac{s}{p}}{\frac{s}{p-a}}=$$

$$b(a+c)+cp-c(p-a)=ab+bc+ac$$

sau:

$$E=\frac{bch_a+abh_a+ach_a}{h_a}$$

Dar:

$$ah_a=bh_b=ch_c$$

astfel că putem scri:

$$E=\frac{bc(h_a+h_b+h_c)}{h_a}$$

Avem astfel stabilită identitatea dată.

Soluţii date de d-nii: *Constantinescu Mircea* (Bucureşti), *Băleanu N.* (Lic. Milit., Craiova), *Costăchescu C-tin* (Lic., Milit., Iaşi), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Grinberg Meer* (Tighina), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Negrea A. Leonte-Mircea* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Olteniţa), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic. Constanţa), *Şerban Al. Teodor* (Lic. Milit., Iaşi), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), şi *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit., Timişoara).

965. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:*

$$\sum a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sum \frac{h_a}{\sin B} = 2 \sum a r_a$$

I PUPEZESCU

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \qquad h_a = c \sin B$$

putem scri succesiv:

$$\sum a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \sum \frac{h_a}{\sin B} = \frac{1}{p} \sum a r_a \cdot \sum c =$$

$$\left(\frac{1}{p} \sum a r_a \right) 2p = 2 \sum a r_a,$$

adică tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Băleanu N.* (Lic., Milit., Craiova), *Dâscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Dini Ion* (Lic. Milit, Craiova), *Dumitrescu N. Romeo* (Lic, Roman), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. Ctin* (Lic.. Constanţa) şi *Ţiucra P. Mircea* (Şc. Polit., Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

989. — Să se găsească numărul întreg ab, format din numerile a şi b de acelaşi număr de cifre scrise unul după altul, ştiind că rădăcina patrată a lui ab este numărul zecimal a_1, b' în care a_1 înseamnă numărul ce se obţine sporind cu 1 toate cifrele lui a, iar b' înseamnă numărul ce se obţine micşorând cu 1 toate cifrele lui b.

COL. GH. BUICLIU

990. — Un jucător a câştigat la primul joc, $\frac{1}{4}$ din banii ce-i avea plus 1 leu. La jocul al doilea a câştigat $\frac{1}{3}$ din banii ce-i avea atunci plus 2 lei; iar la jocul al treilea a câştigat $\frac{1}{2}$ din banii ce-i avea atunci plus 3 lei şi se ridică dela joc cu 48 lei. Ce sumă a avut? (Soluţie aritmetică).

I. DUMITRIU-DADA

991. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 12x^2 + 48y^2 = 1248 \\ xy(14x^2 + 56y^2) = 14560 \end{cases}$$

BENIAMIN OPREA

922. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x - xy + xyz = a \\ y - yz + yzx = b \\ z - zx + zxy = c \end{cases}$$

Să se considere cazul $a = 93$, $b = 75$, $c = 91$.

N. MIHAILEANU

993. — Dreptele ce unesc vârfurile unui triunghiu cu mijloacele segmentelor ce le determină o transversală oare care pe laturile unghiului acestui vârf, tae laturile opuse în trei puncte colineare.

SUBÎ-LT. AURELIAN STAN

994. — Se dă cercul O şi două puncte fixe A şi B. Prin A se duce o secantă care taie cercul în C şi D. Se uneşte B cu mijlocul E al coardei CD. Se cere locul geometric al mijlocului lui BE, când secanta ACD variază.

V ALACI

995. — In orice triunghiu există relaţiile:

1°. $$\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{r_a} = \frac{1}{2R}$$

2°. $$\sum h_a \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2}{2R}$$

3°. $$\sum \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{r_a h_a} = \frac{1}{2p^2} \sum \left(\frac{p}{p-a} - 1 \right)$$

SUBL-LT. C-TIN V. COSTACHESCU

996. — Să se dedermine triunghiurile dreptunghice în care o catetă este egală cu proecţiunea celeilalte catete pe ipotenuză.

A. HOLLINGER

Rectificări şi complectări. 1°. La problema 982, ultimul termen dela numitor este: $+c^3(a-b)$

2°. La problema 987, semnul minus trebuie lăsat la o parte în membrul al 2-lea al egalităţilor.

3°. La problema 988, după determinant trebuie să urmeze:

$$= \frac{1}{2R} \sum r_a (h_b - h_c)$$

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii: *F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos* și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, de sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu*.

Acei dintre corespondenții noștrii care doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Rugăm a ni se trimete de urgență costul abonamentului pentru „R. M. T." pe anul XI.

ANUL XI. 15 MAIU 1931 NO. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 V. ALACI O CLASA DE ECUATIUNI CU RADACINELE REALE
2. NOTE MATEMATICE: 5, 6, 7
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 948, 949, 964, 966, 967, 969
5. PROBLEME PROPUSE: 997-1004
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească“

Rugăm a ni se trimete de urgenţă costul abonamentului pentru „R. M. T.“ pe anul XI.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei.

ANUL XI — No. 3. TIMISOARA, 15 MAIU 1931

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

O CLASA DE ECUAŢIUNI CU RADACINI REALE

de V. ALACI

1. *Fie de construit ecuaţia ale cărei rădăcini sunt:*

$$(1)\qquad x = a\,\frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}.$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

α şi α_1 fiind două arce date şi a real.

Pentru aceasta observăm că în virtutea formulelor lui *Euler*, putem scri:

$$x = a\,\frac{e^{i\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}}{e^{i\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}} =$$

$$a\,\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\,e^{\frac{2ki\pi}{n}}}{e^{i\alpha_1} - e^{-i\alpha_1}\,e^{\frac{2ki\pi}{n}}}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$$\therefore \qquad e^{i\alpha_1}x - e^{i\alpha}a = e^{\frac{2ki\pi}{n}}\left(e^{-i\alpha_1}x - e^{i\alpha}a\right)$$

Ridicând la puterea n şi ţinând seamă că:

$$e^{2ki\pi} = 1,$$

obţinem:

$$(2)\qquad (e^{i\alpha_1}x - e^{i\alpha}a)^n - (e^{-i\alpha_1}x - e^{-i\alpha}a)^n = 0$$

Acum dezvoltăm binoamele şi ordonând după puterile descrescătoare ale lui x, observăm că coeficienţii în virtutea formulelor lui *Euler* sunt: $2i\sin n\alpha_1$ $2i\sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha], \ldots 2i\sin n\alpha$, astfel că (2) devine:

$$(3)\qquad (\sin n\alpha_1)\,x^n - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha]\,.\,a\,x^{n-1} +$$

$$C_n^2 \sin[(n-2)\alpha_1 + 2\alpha]\,.\,a^2 x^{n-2} + \ldots$$

$$+ (-1)^n \sin n\alpha\,.\,a^n = 0$$

Aceasta este ecuaţia căutată, ale cărei rădăcini sunt date de (1).

2. Ecuaţia (3) se poate scri sub o formă foarte simplă şi uşor de ţinut minte, anume:

$$(4)\qquad (x - a)^{(n)} = 0$$

unde (n) ne va aminti a înmulţi termenii din dezvoltarea (4) respectiv cu numerile din şirul:

$$(5)\qquad \sin n\alpha_1, \quad \sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha], \ldots \sin n\alpha$$

Astfel vom întroduce vorbirea curentă:

Fie ecuaţiunea:

$$(6)\qquad (x - a)^{(n)} = 0$$

ataşată şirului:

$$(7)\qquad \sin n\alpha_1, \quad \sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha], \ldots \sin n\alpha$$

Rădăcinele acestei ecuaţiuni sunt:

$$(8)\qquad x = a\,\frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

Exemplu. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(x - 1)^{(2)} = 0$$

ataşată şirului:

$$\sin 2\alpha_1, \qquad \sin(\alpha_1 + \alpha), \qquad \sin 2\alpha.$$

Ecuaţia scrisă dezvoltat este:

$$x^2 \sin 2\alpha_1 - 2x \sin(\alpha_1 + \alpha) + \sin 2\alpha = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$x = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{2}\right)}, \quad (k = 0, 1)$$

deci:

$$x_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}, \qquad x_2 = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}$$

Avem astfel rezolvată prima ecuaţie din problema 918 „R. M. T.“ An. XI. No. 2, pag. 19.

3. Dacă luăm ecuaţia (6) ataşată şirului (7) şi substituim α_1 şi α respectiv prin $\alpha_1 + \frac{\beta}{n}$, $\alpha + \frac{\beta}{n}$ obţinem ecuaţia mai generală:

(9) $$(x-a)^{(n)} = 0$$

ataşată şirului:

(10) $\sin(n\alpha_1+\beta)$, $\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha+\beta]$,

$\sin[(n-2)\alpha_1+2\alpha+\beta], \ldots \sin(n\alpha+\beta)$,

ale cărei rădăcini sunt deci:

(10) $$x = a\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\beta-k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{\beta-k\pi}{n}\right)}, (k=0,1,2,..n-1)$$

Cazuri particulare. 1°. Pentru $\beta = \frac{\pi}{2}$ obţinem ecuaţia:

(12) $$(x-a)^{(n)} = 0$$

ataşată şirului:

(13) $\cos n\alpha_1$, $\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha], \ldots \cos n\alpha$

ale cărei rădăcini sunt:

(14) $$x = a\frac{\sin\left(\alpha-\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}$$

$$(k=0,1,2,\ldots n-1)$$

Exemplu. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(x-1)^{(2)} = 0,$$

ataşată şirului;

$$\cos 2\alpha_1, \qquad \cos(\alpha_1+\alpha), \qquad \cos 2\alpha$$

Ecuaţia scrisă dezvoltat este:

$$x^2\cos 2\alpha_1 - 2x\cos(\alpha_1+\alpha) + \cos 2\alpha = 0$$

ale care rădăcini sunt:

$$x = \frac{\sin\left[\alpha-\frac{(2k-1)\pi}{4}\right]}{\sin\left[\alpha_1-\frac{(2k-1)\pi}{4}\right]}, (k=0,1),$$

deci:

$$x_1 = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)}, \quad x_2 = \frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Avem astfel rezolvată a 2-a ecuaţie din problema 918 „R. M. T.“ An. XI, No. 2, pag. 19.

2°. Pentru $\beta = \frac{\pi}{4}$, termenii şirului (10) vedem că se pot simplifica cu $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, fiind toţi coeficienţii unei ecuaţii, astfel că obţinem ecuaţia:

(15) $$(x-a)^{(n)} = 0$$

ataşată şirului:

(16) $\sin n\alpha_1 + \cos n\alpha_1$, $\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] +$

$\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha], \ldots \sin n\alpha + \cos n\alpha$,

ale cărei rădăcini sunt:

(17) $$x = a\frac{\sin\left[\alpha-\frac{(4k-1)\pi}{4n}\right]}{\sin\left[\alpha_1-\frac{(4k-1)\pi}{4n}\right]}$$

$$(k=0,1,2,\ldots n-1)$$

Exemplu. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(n-1)^{(2)} = 0$$

ataşată şirului:

$$\sin 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_1, \quad \sin(\alpha_1+\alpha) +$$
$$\cos(\alpha_1+\alpha), \quad \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

Ecuaţia scrisă dezvoltat este:

$$x^2(\sin 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_1) - 2x[\sin(\alpha_1+\alpha) +$$
$$\cos(\alpha_1+\alpha)] + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$x = \frac{\sin\left[\alpha-\frac{(4k-1)\pi}{8}\right]}{\sin\left[\alpha_1-\frac{(4k-1)\pi}{8}\right]}, \quad (k=0,1),$$

deci:

$$x_1 = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{8}\right)}, \qquad x_2 = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{8}\right)}$$

Avem astfel rezolvată a 3-a ecuație a problemei 918, „R. M. T." An. XI. No. 2, pag. 19.

Observare. Dacă considerăm ecuațiile:

$$f(x) = (\sin n\alpha_1)\, x^n - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha]\, a\, x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sin n\alpha \,.\, a^n = 0$$

$$f_1(x) = (\cos n\alpha_1)\, x^n - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1 + \alpha]\, a\, x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cos n\alpha \,.\, a^n = 0$$

prima cu rădăcinele:

$$x = a\,\frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}, \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n-1)$$

și a 2-a cu rădăcinele:

$$x = a\,\frac{\sin\left[\alpha - \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]}{\sin\left[\alpha_1 - \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

atunci rezultă din 2°, că ecuația:

$$f(x) + f_1(x) = 0$$

are rădăcinele:

$$x = a\,\frac{\sin\left[\alpha - \frac{(4k-1)\pi}{4n}\right]}{\sin\left[\alpha_1 - \frac{(4k-1)\pi}{2n}\right]}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

Mai general observăm că ecuația:

$$f(x)\cos\beta + f_1(x) \,.\, \sin\beta = 0$$

are rădăcinele:

$$x = a\,\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\beta - k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 + \frac{\beta - k\pi}{n}\right)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

3°. Pentru $\alpha = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, șirul (10) devine:

$$(18) \quad \sin\left(\beta + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \sin\left[\beta + \frac{(n-1)\pi}{2}\right], \ldots \sin\beta$$

Rezultă de aci că ecuația:

$$(x-a)^{(n)} = 0,$$

atașată șirului (18), are rădăcinele:

$$x = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta - k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

Observări. *a.* Pentru n impar, șirul (18) devine:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\beta, (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\beta, (-1)^{\frac{n-3}{2}}\cos\beta, \ldots \sin\beta$$

Împărțind acest șir cu $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\beta$, obținem:

$$(19) \quad 1, \ \mathrm{tg}\,\beta, \ -1, \ -\mathrm{tg}\,\beta, \ldots (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{tg}\,\beta$$

Rezultă dar că ecuația:

$$(x-a)^{(n)} = 0, \qquad (n, \text{impar})$$

atașată șirului (19), are rădăcinele:

$$x = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta - k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

Exemplu. *Să se rezolve ecuația:*

$$(x-a)^{(5)} = 0$$

atașată șirului:

$$1, \ \mathrm{tg}\,\beta, \ -1, \ -\mathrm{tg}\,\beta, \ 1, \ \mathrm{tg}\,\beta$$

Ecuația scrisă dezvoltat este:

$$x^5 - 5\,\mathrm{tg}\,\beta \,.\, x^4 - 10\,x^3 + 10\,\mathrm{tg}\,\beta \,.\, x^2 + 5\,x - \mathrm{tg}\,\beta = 0$$

iar rădăcinele sunt:

$$x = \mathrm{tg}\,\frac{\beta - k\pi}{5}, \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

b. Pentru n par, șirul (18) după transformări ca mai sus, devine:

$$(20) \quad \mathrm{tg}\,\beta, \ -1, \ -\mathrm{tg}\,\beta, \ 1, \ \mathrm{tg}\,\beta, \ldots + (n-1)^{\frac{n}{2}}\mathrm{tg}\,\beta$$

Astfel ecuația:

$$(x-a)^{(n)} = 0, \qquad (n, \text{ par})$$

ataşată şirului (20), are rădăcinele:

$$x = a \operatorname{tg} \frac{\beta - k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

4). Dacă în şirul (18) luăm întâi $\alpha_1 = \beta = 0$ şi apoi $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, obţinem respectiv şirurile:

(21) $\quad 0, \quad \sin\alpha, \quad \sin 2\alpha, \ldots \sin n\alpha$

(22) $\quad 1, \quad \cos\alpha, \quad \cos 2\alpha, \ldots \cos n\alpha$

Rezultă că ecuaţia:

(23) $\quad (x-a)^{(n)} = 0$

ataşată şirului (21) *are rădăcinele:*

$$x = a \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \alpha\right)}{\sin\frac{k\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

şi aceiaşi ecuaţie (23) *ataşată şirului* (22), *are rădăcinele:*

$$x = a \frac{\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} - \alpha\right]}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}},$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

Exemplu. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(x-a)^{(3)} = 0,$$

ataşată şirului:

$$0, \quad \sin\alpha, \quad \sin 2\alpha, \quad \sin 3\alpha$$

Ecuaţia scrisă dezvoltat este:

$$3\sin\alpha \,.\, x^2 - 3\sin 2\alpha \,.\, x + \sin 3\alpha = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{3}}, \; x_2 = \frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}{\sqrt{3}}$$

Alt exemplu. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(x-1)^{(3)} = 0,$$

ataşată şirului:

$$1, \quad \cos\alpha, \quad \cos 2\alpha, \quad \cos 3\alpha.$$

Ecuaţia scrisă dezvoltat este:

(24) $\quad x^3 - 3\cos\alpha \,.\, x^2 + 3\cos 2\alpha \,.\, x - \cos 3\alpha = 0,$

ale cărei rădăcini sunt:

(25) $$x = \frac{\sin\left[\frac{(2k-1)}{6} - \alpha\right]}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{6}}, \quad (k = 0, 1, 2)$$

4. Toate aceste ecuaţii tratate le putem privi drept cazuri paeticularq ale ecuaţiei mai generale:

(26) $\quad (a_1 x + b_1)^n - (a_2 x + b_2)^n = 0$

care se poate rezolva astfel, observând că putem scri:

$$\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

$$\therefore \text{(27)} \quad x = \frac{b_2\cos\frac{2k\pi}{n} + b_2 i\sin\frac{2k\pi}{n} - b_2}{a_1 - a_2\cos\frac{2k\pi}{n} - a_2 i\sin\frac{2k\pi}{n}},$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

De exemplu ecuaţia (2) se poate obţine din (26) luând:

$$a_1 = e^{i\alpha_1}, \; b_1 = -e^{i\alpha}a, \; a_2 = e^{-i\alpha_1}, \; b_2 = -e^{-i\alpha}a$$

5. Am invederat astfel o clasă de ecuaţiuni interesante de forma (9), ataşate şirului (10), care se pot scri foarte simplu şi ale căror rădăcini sunt cuprinse toate într'o aceiaşi expresiune (11). Am cercetat şi diferitele cazuri particulare.

Menţionez încă că dacă am folosi relaţiile cunoscute dintre rădăcinele şi coeficienţi acestor ecuaţii, am obţine o clasă importantă de identităţi trigonometrice.

Astfel spre exemplu dacă privim ecuaţia (24) şi rădăcinele ei (25), şi scrim suma patratelor, rădăcinelor şi produsul lor în funcţie de coeficienţi, obţinem identităţile:

$$4\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) +$$

$$\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 9\cos^2\alpha - 6\cos 2\alpha$$

$$4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 3\alpha$$

identităţi care se pot stabili şi direct.[1])

[1]) A se vedea şi articolul *„Asupra unei clase de ecuaţiuni algebriee cu rădăcini trigonometrice“*, „R. M. T.“ An IX No. 10.

NOTE MATEMATICE

5. — *Aplicaţie a unei teoreme în legatură cu teorema lui Pappus.*

Intr'un articol din R. M. T. (anul X. No. 5) am demonstrat următoarea teoremă:

Dacă triunghiul înscris $A_1B_1C_1$ *are acelaş centru de greutate ca triunghiul* ABC, *atunci triunghiul* $A_2B_2C_2$ *înscris, astfel că:*

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{AB}}$$

are şi el acelaş centru de greutate.

Voiu arăta acum un mod particular de a obţine prin construcţie un triunghiu $A_2B_2C_2$; pentru aceasta duc $AA_2 \parallel A_1C_1$; $BB_2 \parallel A_1B_1$; $CC_2 \parallel B_1C_1$; să arăt că $A_2B_2C_2$ are acelaş centru de greutate ca triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$, adică să demonstrăm că avem relaţiile din teorema de mai sus.

Ori dacă:

$$(1) \qquad \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{m}{n}$$

şi: $AA_2 \parallel A_1C_1$, atunci:

$$\frac{BA_1}{A_1A_2} = \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{n}{m}$$

deci:

$$A_1A_2 = \frac{m}{n} \cdot BA_1$$

şi din (1) deduc:

$$BC = \frac{m+n}{m} \cdot BA_1;$$

rezultă deci:

$$\frac{A_1A_2}{BC} \quad \frac{m^2}{n(m+n)}$$

La fel vom obţine pentru celelalte rapoarte; deci în virtutea teoremei din articolul citat construcţia e legitimată.

Obs. I-a. Puteam lua $AA'_2 \parallel A_1B_1$ schimbând astfel sensul de parcurgere pe laturile triunghiului ABC. Se obţin astfel două serii de triunghiuri cu acelaş centru de greutate.

Obs. II-a. Cu această ocazie am rezolvat şi reciproca problemei 938 (R. M. T. anul X. 7), căci punând condiţia ca AA_2, BB_2, CC_2 să fie concurente, găsim:

$$\frac{r^3}{(1-r)^3} = +1 \qquad \left(\frac{m}{n} = r\right)$$

deci:

$$r = \frac{1}{2}$$

adică în cazul medianelor.

ALEXANDRU NICULESCU

6. — *Asupra unui sistem de ecuaţiuni.*

1. Imi propun să mă ocup de următorul sistem de ecuaţiuni:

$$(1) \qquad \begin{cases} x(y^2+z^2-x^2) = 2ayz, \\ y(z^2+x^2-y^2) = 2bzx, \\ z(x^2+y^2-z^2) = 2cxy. \end{cases}$$

Voi rezolva acest sistem şi la urmă îl voi interpreta. Inmulţesc prima ecuaţie cu y, pe a doua cu x şi le adun, obţin:

$$z(2ay^2+2bx^2) = 2z^2xy$$

$$\therefore \qquad z(ay^2+bx^2) = xyz^2$$

Inlătur soluţia $z=0$; procedez apoi la fel pentru celelalte ecuaţii ale sistemului (1) şi înlăturând şi soluţiile $x=0$, $y=0$ voi obţine în locul sistemului (1), următorul sistem de ecuaţiuni:

$$(2) \qquad \begin{cases} ay^2+bx^2 = xyz, \\ bz^2+cy^2 = xyz, \\ cx^2+az^2 = xyz. \end{cases}$$

Dacă consider acum ecuaţia întâia din sistemul (2) împreună cu a doua, apoi ecuaţia a doua împreună cu a treia, rezultă că am:

$$ay^2+bx^2 = bz^2+cy^2,$$

$$bz^2+cy^2 = cx^2+az^2$$

$$\therefore \ (3) \qquad \begin{cases} bx^2+(a-c)y^2-bz^2 = 0, \\ cx^2-cy^2+(a-b)z^2 = 0. \end{cases}$$

Din sistemul (3) deducem foarte uşor:

$$\frac{x^2}{a(a-b-c)} = \frac{y}{b(b-a-c)} = \frac{z^2}{c(c-a-b)} = \varrho$$

$$\therefore \text{ (4)} \quad \begin{cases} x^2 = \varrho\, a(a-b-c), \\ y^2 = \varrho\, b(b-a-c), \\ z^2 = \varrho\, c(c-a-b). \end{cases}$$

Introducând valorile (4) în prima ecuaţiune din (2), de exemplu, căpătăm:

$$\varrho\, a\, b(b-a-c) + \varrho\, a\, b(a-b-c) =$$

$$\sqrt{\varrho^3\, a\, b\, c(a-b-c)(b-a-c)(c-a-b)}$$

Ridicând aci la patrat şi simplificând, reese:

(5) $$\varrho = 0$$

(6) $$\varrho = \frac{4\,a\,b\,c}{(a-b-c)(b-a-c)(c-a-b)}.$$

Valoarea (5) a lui ϱ introdusă în (4) ne conduce la soluţiunea:

I) $$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

pe care am mai găsit-o chiar la început.

Valoarea (6) întrodusă în (4) ne conduce la:

(II)
$$x = 2a\sqrt{\frac{bc}{(a+b-c)(a+c-b)}},$$

$$y = 2b\sqrt{\frac{ca}{(b+a-c)(b+c-a)}},$$

$$z = 2c\sqrt{\frac{ab}{(c+a-b)(c+b-a)}},$$

2. *Interpretare.* Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghiu oarecare A B C şi a', b', c' lungimile laturilor triunghiului său ortic, apoi atunci avem: $a' = a\cos A$, $b' = b\cos B$, $c' = c\cos C$ Dacă punem în loc de a, b, c pe x, y, z şi în loc de a', b', c' punem a, b, c apoi atunci avem sistemul (1) după ce am înlocuit pe cos A, cos B, cos C în funcţie de laturile x, y, z. Prin urmare sistemul (1) rezolvă problema următoare:

Cunoscând laturile triunghiului ortic al unui triunghiu oarecare A B C, *să se găsiască lungimile laturilor acestui triunghiu, în funcţie de lungimile laturilor triunghiului său ortic.*

Se pune întrebarea, dacă nu cumva s'ar putea studia o chestiune analoagă, de exemplu, când în locul laturilor triunghiului pedal al ortocentrului, am considera laturile triunghiului pedal al unui alt punct remarcabil.

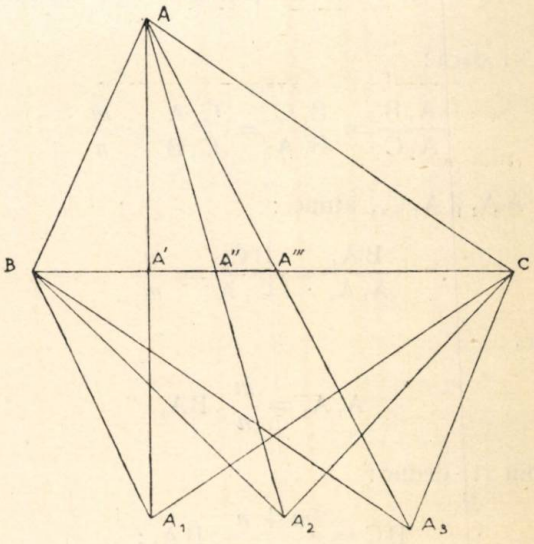
Pe măsură ce voi studia asemenea cazuri, le voi aduce la cunoştinţa cititorilor acestei reviste.

VIRGIL CLAUDIAN

7. — *Asupra triunghiurilor în care avem:*

$$a = h_a, \qquad a = b_a, \qquad a = m_a$$

Ne propunem să stabilim câteva relaţii mai importante, între laturile şi unghiurile unui triunghiu, în care o latură este egală:
1°) cu înălţimea, 2°) cu bisectoarea, 3°) cu mediana corespunzătoare.



Fie triunghiul A B C, A A' înălţimea, A A'' bisectoarea, A A''' mediana, corespunzătoare laturei B C şi încă, A_1, A_2, A_3 respectiv, simetricele punctului A, în raport A', A'', A'''.

1°) $a = h_a$. Din figură, putem scrie:

$$BA' + MA' = AA'\left(\frac{\sin BAA'}{\sin ABA'} + \frac{\sin CAA'}{\sin ACA'}\right)$$

$$(\alpha) \quad \therefore \quad \frac{\sin BAA'}{\sin B} + \frac{\sin CAA'}{\sin C} = 1$$

Relaţia (α) pentru A A' ⊥ B C, devine:

(1) $\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = 1$

(Relaţie ce se poate deduce şi din: $\sin A = \sin B \sin C$ stabilită în R. M. T. An X, Nota 24).

Tot din figură, avem încă:

(2) $b > a < c$

Observăm că:

(β) $S(A B A_1 C) = S(A C A_1) + S(A B A_1)$

(3) $2a^2 = b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B$

In fine, triunghiurile dreptunghice $A A' B$ şi $A A' C$, dau:

(4) $b \sin C = a = c \sin B$

(2°) $a = b_\alpha$

In acest caz relaţia analoagă lui (α), devine:

$$\sin \frac{A}{2}\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) = 1$$

(5) $\therefore \quad \operatorname{cosec} \frac{A}{2} = \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C$

Relaţia analoagă lui (β), dă:

$$a \sin A A'' B = b \sin C A A_2 + c \sin B A A_2$$

$$\therefore \quad a \sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b + c) \sin \frac{A}{2}$$

(6) $\therefore \quad \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{\cos \dfrac{B+C}{2}}{\cos \dfrac{B-C}{2}}$

Triunghiurile $A A'' B$ şi $A A'' C$, dau prin teorema sinusurilor:

(7) $$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin C}{\cos \dfrac{B-C}{2}} \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin B}{\cos \dfrac{B-C}{2}} \end{cases}$$

3°. $a = m_\alpha$.

Observând figura, putem scrie succesiv:

$$\begin{cases} 2 \sin B A A''' = \sin B \\ 2 \sin C A A''' = \sin C \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin(A - B A A''')}{\sin B A A'''} = \frac{\sin C}{\sin B}$$

$$\therefore \quad \operatorname{cotg} B A A''' = \frac{\sin C}{\sin A \sin B} + \operatorname{cotg} A$$

$$\therefore \quad \frac{\sin B}{2} = \sin B A A''' = \frac{\sin A}{\sqrt{1 + \dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 B} + 2 \dfrac{\sin C}{\sin B} \cos A}}$$

(8) $\therefore \quad 4 \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos A$

Paralelogramul $\sphericalangle B A_3 C$, ne dă:

(9) $b + c > 2a$

Din figură, avem încă:

$$a^2 \sin B A''' A = b c \sin A$$

(10) $\therefore \quad a^2 \sin B (\cos B + \sqrt{4 - \sin^2 B}) = 2 b c \sin A$

Triunghiurile $A B A'''$ şi $A C A'''$, dau:

(11) $$\begin{cases} a \sin\left[B + \operatorname{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin B}{2}\right)\right] = c \sin B \\ a \sin\left[C + \operatorname{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin C}{2}\right)\right] = b \sin C \end{cases}$$

Observare: Pentru un triunghiu isoscel, aceste relaţii sunt îndeplinite, când $\sphericalangle A = 53°$. In acest caz, avem $a = h_a = b_a = m_a$.

NICOLAE MIHAILEANU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematica*, anul XXXVI, No. 8, Aprilie 1931. Generalizarea problemei 3372, de Prof. *Gh. Constantinescu* O variabilă importanţă în combustiunea motoarelor de aviaţie, de Căp. *Gh. Niculescu*.

2. *Giovanni Ricci.* Sulle funzioni simmetriche di interi constituenti uno o più sistemi di resti, secondo un modulo composto. (Annali delle Università Toscane, vol. XIII).

3. *Giovanni Ricci.* Sulle somme delle potenze simili degl'interi naturali e sui coefficienti del fattoriale. (Annali delle Universitâ Toscane).

4. *D. Cazancli. Ioan Popp*, primul profesor de Geometrie Analitică la Universitatea din Iaşi. (Extras din Revista „V. Adamachi" An XVI, No. 1).

PROBLEME REZOLVATE

948. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z+u=12 \\ x^2+y^2+z^2+u^2=170 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=1764 \\ xy=zu \end{cases}$$

M. N GRINBERG

Insemnând pentru prescurtare:

(1) $x+y=\alpha, \quad z+u=\beta, \quad xy=zu=\gamma$

sistemul dat se poate scri:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=12 \\ \alpha^2+\beta^2-4\gamma=170 \\ \alpha^3+\beta^3-3\gamma(\alpha+\beta=1764 \end{cases}$$

Ridicând prima relaţie la patrat şi scăzând pe a 2-a, apoi ridicând prima relaţie la cub şi scăzând a 3-a obţinem după ce simplificăm;

$$\begin{cases} \alpha+\beta=12 \\ \alpha\beta+2\gamma=-13 \\ \alpha\beta+\gamma=-1 \end{cases}$$

Scăzând ultimele două ecuaţii găsim:

$$\gamma=-12 \qquad \text{şi deci} \qquad \alpha\beta=11$$

α şi β satisfac sistemul:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=12 \\ \alpha\beta=11 \end{cases}$$

fiind astfel rădăcinele ecuaţiei.

$$t^2-12t+11=0$$

$$\therefore \qquad t=6\pm 5$$

Rezultă dar pentru α, β, γ sistemele de soluţii:

$$\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=11 \\ \gamma=-12 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=11 \\ \beta=1 \\ \gamma=-12 \end{cases}$$

Inlocuind aceste valori în (1), obţinem pentru x, y, z şi u, următoarele sisteme:

$$(2)\ \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-12 \\ z+u=11 \\ zu=-12 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} x+y=11 \\ xy=-12 \\ z+u=1 \\ zu=-12 \end{cases}$$

In primul sistem observăm că x şi y sunt rădăcinele ecuaţie:

$$(4) \qquad t^2-t-12=0, \quad \therefore \quad t=\frac{1\pm 7}{2},$$

iar z şi u sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$(5) \qquad t^2-11t-12=0, \quad \therefore \quad t=\frac{11\pm 13}{2}.$$

Rezultă pentru x, y, z, u următoarele sisteme de soluţiuni:

x	4	4	−3	−3
y	−3	−3	4	4
z	12	−1	12	−1
u	−1	12	−1	12

x şi y din sistemul (3) satisfac ecuaţia (5), iar z şi u satisfac acuaţia (4), deci avem încă şi următoarele sisteme de soluţii pentru x, y, z, u:

x	12	12	−1	−1
y	−1	−1	12	12
z	4	−3	4	−3
u	−3	4	−3	4

Soluţii date de d-nii: *Beral H.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Derenbaum M.*, *Lupescu Gh. C.* (Lic., Roman), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Parepeanu I.* (Lic. Braşov), *Pascaru I.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Pisai I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Popoe Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Pupezescu Gh. Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Ragolschi Eugen* (Lic. Milit., Chişinău), *Rusu D. C-tin* (Lic. Constanţa), *Vonica C. Ioan* (Şc. Polit., Timşoara) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic. Constanţa).

949. — *In triunghiul* A B C, *în care* A C = 1, $\widehat{A} = 45^0$ *şi* $\widehat{C} < 90^0$, *se duce din* C *o dreaptă care tae pe* A B *în* D, *astfel că:*

$$\widehat{DCA} = \frac{\widehat{C}}{3}$$

Din B *şi* D *se duc pe* A C *perpendicularele* BB_1 *şi* DD_1 *şi se notează:*

$$B_1B_1 = a, \qquad DD_1 = b$$

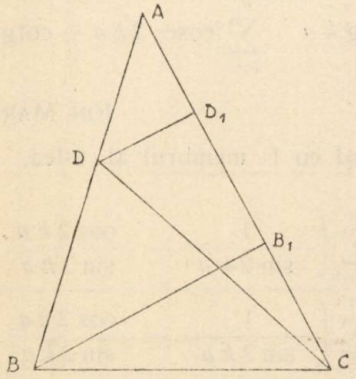
Se cere să se stabilească relaţiunea:

$$a = \frac{3b - 6b^2 + 2b^3}{1 - 6b^2 + 4b^3}$$

Care este relaţia corespunzătoare, dacă $\widehat{C} > 90^0$?

V. ALACI

1°. Construim figura în cazul $\widehat{C} > 90^0$.



Triunghiurile dreptunghice B_1AB şi D_1AD, având $\widehat{A} = 45^0$, sunt isoscele, deci:

$$BB_1 = AB_1 = a, \qquad DD_1 = AD_1 = b$$

Apoi din triunghiurile dreptunghice B_1BC şi D_1DC, deducem:

$$(1) \qquad \operatorname{tg} C = \frac{a}{1-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{3} = \frac{b}{1-b}$$

Cum ştim că:

$$(2) \qquad \operatorname{tg} C = \frac{3\operatorname{tg}\frac{C}{3} - \operatorname{tg}^3\frac{C}{3}}{1 - 3\operatorname{tg}^3\frac{C}{3}}$$

rezultă ţinând seamă de (1):

$$\frac{a}{1-a} = \frac{3\,\frac{b}{1-b} - \frac{b^3}{(1-b)^3}}{1 - 3\,\frac{b^2}{(1-b)^2}} =$$

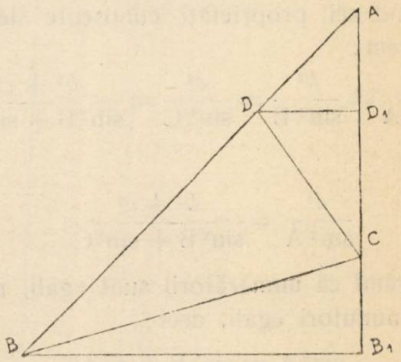
$$\frac{3b(1-b)^3 - b^3}{(1-b)^3 - 3b^2(1-b)} = \frac{3b - 6b^2 + 2b^3}{1 - 3b + 2b^3}$$

Adunând la numitorul fracţiilor pe numărător în ambii membrii deducem:

$$a = \frac{3b - 6b^2 + 2b^3}{1 - 6b^2 + 4b^3},$$

tocmai relaţia cerută:

2. Construim figura în cazul $\widehat{C} > 90^0$.



Avem şi aci:

$$BB_1 = AB_1 = a, \qquad DD_1 = AD_1 = b.$$

Din triunghiurile dreptunghice B_1BC şi D_1DC, deducem:

$$\operatorname{tg} C = \frac{a}{a-1}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{3} = \frac{b}{1-b}$$

Inlocuind aceste valori în (2), găsim:

$$\frac{a}{a-1} = \frac{3b - 6b^2 + 2b^3}{1 - 3b + 2b^3}$$

De aci deducem:

$$a = -\frac{3b - 6b^2 + 2b^3}{1 - 6b + 6b^2}$$

Aceasta este relaţiunea dintre a şi b, în cazul $\widehat{C} > 90^0$.

Soluţii date de d-nii: *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Negrea A. Mireea Leonte* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Pop Leontin* (Şc. Polit. Timişoara), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Vonica C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie).

964. — *Să se demonstreze că* A, B, C *fiind cele trei unghiuri ale unui triunghiu în care:*

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

avem în mod identic:

$$\sin^2 A = \sin^2 B = \sin^2 C$$

Să se deducă de aci că un triunghiu în care se aplică teorema lui Pitagora nu poate fi de cât dreptunghiu.

A. HOLLINGER

Folosim relaţiile cunoscute într'un triunghiu oarecare, anume:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aplicând aci proprietăţi cunoscute ale proporţiilor, avem:

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} = \frac{b^2 + c^2}{\sin^2 B + \sin^2 C}$$

Având:

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2 + c^2}{\sin^2 B + \sin^2 C},$$

şi observând că numărătorii sunt egali, rezultă că avem şi numitori egali, deci:

(1) $$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C.$$

Să demonstrăm acum partea a 2-a a problemei. Din relaţia:

$$A = 180^0 - (B + C)$$

deducem:

$$\sin A = \sin (B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

Ridicând la patrat avem:

$$\sin^2 A = \sin^2 B \cos^2 C + \sin^2 C \cos^2 B +$$

$$2 \sin B \cos B \sin C \cos C = \sin^2 B - \sin^2 B \sin^2 C +$$

$$\sin^2 C - \sin^2 C \sin^2 B + 2 \sin B \cos B \sin C \cos C$$

Simplificând această relaţie, ţinând seamă de (1), deducem:

$$2 \sin B \sin C (\cos B \cos C - \sin B \sin C) = 0$$

Cum unghiurile B şi C nu pot fi zero sau 180^0, rezultă:

$$\cos B \cos C = \sin B \sin C$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{cot} C,$$

deci:

$$\sphericalangle B + \widehat{C} = 90^0,$$

şi atunci:

$$\sphericalangle A = 90^0$$

Triunghiul care satisface teorema lui *Pitagora*, deci şi relaţia (1), este dreptunghic.

Soluţii date de d-nii: *Beral Haim* (Lic. Naţional, Iaşi), *Boerescu P. George* (Lic., Oltenita), *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Dini Ion* (Lic. Milit., Craiova), *Dumitrescu N. Romeo* (Lic., Roman), *Grinberg M.*, *Ionescu P. Haralamb. Iotta D. Mihail* (Şc. Potit., Timişoara), *Lupescu C-tin* (Lic., Roman), *Marşieu I.*, *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N.* (Lic, Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Negrea A. Mircea Leonte* (student Bucureşti), *Popa Gh. Ion* (Lic., Oltenita), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Sullă A. Paul* (Lic., Milit., Chişinău) şi *Weissmunn Mauriciu* (Lic., Constanţa).

966. — *Să se arate că:*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k a}{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotg} k a} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{cosec} 2 k a - \operatorname{cotg} 2 k a)}{\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{cosec} 2 k a - \operatorname{cotg} 2 k a)}$$

ION MARGINEANU

Insemnând cu E membrul al 2-lea, putem scri succesiv:

$$E = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sin 2 k a} - \frac{\cos 2 k a}{\sin 2 k a} \right)}{\sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{\sin 2 k a} - \frac{\cos 2 k a}{\sin 2 k a} \right)} =$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \cos 2 k a}{\sin 2 k a}}{\sum_{k=1}^{u} \frac{1 + \cos 2 k a}{\sin 2 k a}} + \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{2 \sin^2 k a}{2 \sin k a \cos k a}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{2 \cos^2 k a}{2 \sin k a \cos k a}} =$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k a}{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cot} k a}$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Băleanu N.* (Lic. Milit., Craiova), *Dan Traian* (Lic., Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Dini S.* (Lic. Milit., Craiova), *Tofin Cornel* (Lic., Beiuş), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic. Roman), *Mihăileanu N.* (Lic. Constanţa),

Negrea A. Leonte Mircea (student, Bucureşti), *Pop Sabin* (Lic., Beiuş), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenița), *Purdilă A.* (Lic., Braşov) şi *Ţiucra P. Mircea* (Şc. Polit., Timişoara).

Au mai trimes soluțiuni d-nii: *Ionescu P. Haralamb-Biss* (student, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Millea E. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Parepeanu C. I.* (Lic., Braşov) şi *Sâmbotin Gh.*

967. — *Se cer patratele de forma a b c d astfel ca:*

$$a\,b\,c\,d = N^2 \qquad \text{şi} \qquad d\,c\,b\,a = (3\,N)^2$$

MIRCEA CONSTANTINESCU

In virtutea enunțului putem scri:

$$(1)\quad 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a = 9\,N^2 = 9000\,a + 900\,b + 90\,c + 9\,d\,.$$

a fiind diferit de zero şi ultimul membru fiind de patru cifre, rezultă $a = 1$ şi comparând cu primul membru deducem $d = 9$.

Inlocuind aceste valori în (1) şi simplificând, avem:

$$100\,c + 10\,b + 1 = 900\,b + 90\,c + 81$$

sau:

$$c = 89\,b + 8$$

Această relație nu poate fi verificată de cât luând:

$$b = 0, \quad c = 8$$

Numărul de forma $a\,b\,c\,d$ este astfel 1089, care fiind şi patrat perfect este singura soluție a problemei.

Observare. Aceiaşi unică soluție găsiam dacă se cerea numerile $a\,b\,c\,d$, astfel ca:

$$d\,c\,b\,a = 9 \times a\,b\,c\,d$$

Soluții date de d-nii: *Beral H.* (Lic. Național, Iaşi), *Boerescu G.* (Lic., Oltenița), *Bujoreanu Vicențiu* (Şc. Milit. de Geniu), *Ceausescu Vasile* (Lic. Milit., Iaşi), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Național, Iaşi), *Dumitrescu N. Romeo*, *Grinberg N. M.* (Tighina), *Joaniu C. Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Ionescu P. Haralamb* (Bucureşti), *Lupescu Gh. C.* (Lic., Roman), *Marsieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mehedinți D.* (Lic. Milit. Tg.-Mureş), *Mihăileanu N. N.* (Constanța), *Millea Ene* (Şc. Milit., de Artilerie), *Necu I. Ilie* (Lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Pascaru I.* (Lic. Național, Iaşi), *Pănoiu E.* (Lic. Carol, Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenița). *Pardilă Anton* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanța), *Sâmbotin G.*, *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic. Constanța).

969. — *Să se rezolve sistemul de ecuații:*

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + x\,y^2 - x^2\,y = 5 \\ x^4\,y^2 + x^2\,y^4 = 20 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Sistemul dat se poate scri:

$$(1)\qquad \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 5 \\ x^3\,y^2\,(x^2+y^2 = 20 \end{cases}$$

Dacă însemnăm:

$$2)\qquad x - y = u, \quad x\,y = v$$

sistemul (1) devine:

$$(3)\qquad \begin{cases} u\,(u^3 + 2\,v) = 5 \\ v^2\,(u^2 + 2\,v) = 20 \end{cases}$$

Prin împărțire, găsim:

$$(4)\qquad u = \frac{v^2}{4}$$

Inlocuind această valoarea în a 2-a ecuație din (3) avem:

$$v^6 + 32\,v^3 - 320 = 0,$$

care rezolvată ne dă:

$$v^3 = -16 \pm \sqrt{576} = -16 \pm 24,$$

deci:

$$v^3 = 8 \qquad \text{şi} \qquad c^3 = -40$$

De aci deducem:

$$v_1 = 2, \quad v_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$v_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$v_4 = -2\sqrt[3]{5}, \; v_5 = -2\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$v_6 = -2\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

Ținând seamă de (4), rezultă că sistemul (3), are următoarele sisteme de soluții:

$$\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \\ v = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} u = \cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3} \\ v = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{25} \\ v = -2\sqrt[3]{25} \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} u=\sqrt[3]{25}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \\ v=-2\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\sqrt[3]{25}\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right) \\ v=-2\sqrt[2]{5}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Să ne reîntoarcem acum la sistemul (2), care se poate scri:

$$x-\frac{v}{x}=u$$

sau:

$$x^2-ux-v=0.$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$x=\frac{u\pm\sqrt{u^2+4v}}{2}$$

Rădăcinele sistemului (2) sunt astfel:

$$\begin{cases} x=\dfrac{u\pm\sqrt{u^2+4v}}{2} \\ y=\dfrac{2v}{u\pm\sqrt{u^2+4v}} \end{cases}$$

Inlocuind pe u şi v prin sistemele lor de valori die (5), obţinem 12 sisteme de valori pentru x şi y. In particular luând pentru u şi v sistemele reale din (5), obţinem:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt[3]{25}\pm\sqrt{-3\sqrt[3]{5}}}{2} \\ y=\dfrac{-4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25}\pm\sqrt{-3\sqrt[3]{5}}} \end{cases}$$

Soluţii parţiale date de d-nii: *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., (Roman), *Marsieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanţa), *Sultă Paul* (Lic. Milit., Chişinău) şi *Weissmnnn Mauriciu* (Lic., Constanţa).

PROBLEME PROPUSE

997. — Se cer numerele $a\,b\,a\,c$, divizibile cu 5, astfel ca suma cifrelor să ne dea un număr format cu cifre identice.

TEODOR MARSIEU

998. — Să se descompună în factori suma:

$$\Sigma x^3yz-\Sigma x^2y^2+xyz-x^2y^2z^2$$

IOAN C. SAVIN

999. — Să rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-b-c}=\dfrac{y}{b-c-a}=\dfrac{z}{c-a-b} \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=2 \end{cases}$$

I. DUMITRIU-DADA

1000. — Fie M, N, O, P proecţiile unui punct de pe diagonala unui dreptunghiu pe laturi. Să se demonstreze că expresiunea:

$$\overline{MN}\cdot\overline{OP}+\overline{NO}\cdot\overline{MP}$$

este constantă.

SUBL-LT. C-TIN V. COSTACHESCU

1001. — Intersecţia bisectoarelor unghiurilor unui paralelogram A B C D, formează un patrulater. Să se arate că:

1°. Acest patrulater este un dreptunghiu.

2°. Diagonalele lui sunt concurente cu diagonalele paralelogramului dat, şi paralele respectiv cu laturile acestui paralelogram.

3°. Să se afle valoarea maximă şi minimă a suprafeţei dreptunghiului astfel format.

ION MARGINEANU

1002. — Fiind date punctele A, B, C în linie dreaptă, se duce tangenta C T la cercul de diametru A B. Cercul cu centrul în C şi raza C T tae pe A B în M şi N. Să se arată că:

$$AM.AN=AB.AC.$$

N. ABRAMESCU

1003. — Să se stabilească identitatea:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\pi}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-2\pi}{3}=9\operatorname{tg}^2\alpha-6\operatorname{tg}\alpha$$

V. ALACI

1004. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, se cere să se stabilească relaţia:

$$s=\frac{4Rr(r_a+r_b+r_c}{a\sec^2\frac{A}{2}+b\sec^2\frac{B}{2}+c\sec^2 C}$$

ION GH POPA

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek,* Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann,* La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale,* Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez,* Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell,* Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff,* Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera,* S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky,* Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler.* Washington (Statele Unite), *J. Shohat,* Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville,* Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault,* Le Mans (Francia), *O. Szász,* Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti,* Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, de sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis,* a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu.*

Acei dintre corespondenții noștrii care doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis,* Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngri. jire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Rugăm a ni se trimete de urgență costul abonamentului pentru „R. M. T." pe anul XI.

ANUL XI. 15 IUNIE 1931 NO. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 VIRGIL CAUDIAN ASUPRA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE
2. NOTE MATEMATICE: 8, 9, 10
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 902, 930, 940, 945, 952 968, 972, 980
5. PROBLEME PROPUSE: 1005-1012
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească

Rugăm a ni se trimete de urgență costul abonamentului pentru „R. M. T." pe anul XI.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 120 lei.
Anul III, broșat, 120 lei.
Anul IV, broșat, 120 lei.
Anul V, broșat, 120 lei.
Anul VI, broșat, 120 lei.
Anul VII, broșat, 120 lei.
Anul VIII, broșat, 120 lei.
Anul IX, broșat 120 lei.
Anul X, broșat 120 lei.

ANUL XI— NO. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1931

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE

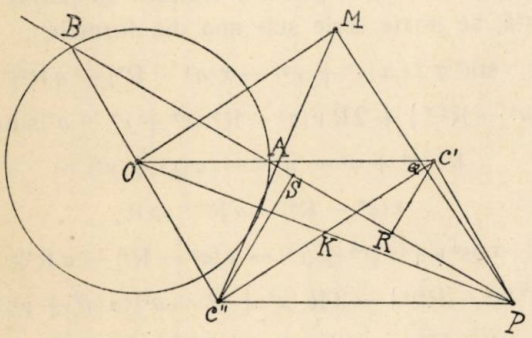
de VIRGIL CLAUDIAN

In rândurile ce urmează, îmi propun să mă ocup de o chestiune de geometrie, pe care o voi soluționa și pe cale analitică și pe cale geometrică.

Iată despre ce este vorba:

Se consideră un cerc fix și un punct exterior P. *Se duce prin* P *o secantă variabilă care întâlnește cercul în* A *și* B; *se duc prin* P, *două cercuri care să fie tangente în* A *și* B *cercului fix și se cere locul celui de al doilea punct comun celor două cercuri variabile.*

1. *Prima soluție analitică.*



Să luăm punctul exterior P ca origină a două axe perpendiculare, din care $0x$ (respectiv Px) să treacă prin centrul O al cercului fix. Fie O $(a, 0)$: atunci ecuația cercului fix e de forma:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2ax + b = 0$$

Fie A $(r' \cos\alpha,\ r' \sin\alpha)$ și B $(r'' \cos\alpha,\ r'' \sin\alpha)$ coordonatele punctelor A și B. Scriind că aceste puncte sunt pe cercul (1), rezultă că r' și r'' sunt rădăcinile ecuației:

$$(2) \qquad r^2 - 2ar\cos\alpha + b = 0.$$

Ecuațiunile tangentelor în A și B la cercul fix sunt:

$$(3) \quad x(r'\cos\alpha - a) + y r' \sin\alpha - a r' \cos\alpha + b = 0,$$

$$(4) \quad x(r''\cos\alpha - a) + y r'' \sin\alpha - a r'' \cos\alpha + b = 0$$

Prin urmare ecuațiunile cercurilor ce trec prin P, și sunt tangente în A și B cercului fix, sunt de formele următoare:

$$(5) \quad x^2 + y^2 - 2ax + b + \lambda[x(r'\cos\alpha - a) + y r' \sin\alpha - a r' \cos\alpha + b] = 0,$$

$$(6) \quad x^2 + y^2 - 2ax + b + \mu[x(r''\cos\alpha - a) + y r'' \sin\alpha - a r'' \cos\alpha + b] = 0.$$

Scriind că aceste cercuri trec prin P, adică prin origina axelor, găsim ușor:

$$\lambda = \frac{b}{a r' \cos\alpha - b}, \qquad \mu = \frac{b}{a r'' \cos\alpha - b}$$

Prin urmare ecuațiile (5) și (6) devin:

$$(7) \qquad x^2 + y^2 + \frac{(b - 2a^2) r' \cos\alpha + ab}{a r' \cos\alpha - b} x + \frac{b r' \sin\alpha}{a r' \cos\alpha - b} y = 0,$$

$$(8) \qquad x^2 + y^2 + \frac{(b - 2a^2) r'' \cos\alpha + ab}{a r'' \cos\alpha - b} x + \frac{b r'' \sin\alpha}{a r'' \cos\alpha - b} y = 0,$$

Pentru a găsi locul cerut în enunț, va trebui să eliminăm pe r și α între ecuațiile (2), și ecuațiile (7) și (8) reduse la una, punând în loc de r', r'' pe r. Insă e mai bine să facem cum urmează:

Adunăm ecuațiile (7) și (8) și reese:

(9) $$(x^2+y^2)[a(r'+r'')\cos\alpha-2b]+$$
$$x[(b-2a^2)(r'+r'')\cos\alpha+2ab]+$$
$$by(r'+r'')\sin\alpha=0.$$

Insă din (2):

$$r'+r''=2a\cos\alpha$$

Prin urmare (9) devine ce urmează:

(10) $$(x^2+y^2)(a^2\cos^2\alpha-b)+$$
$$x[a(b-2a^2)\cos^2\alpha+ab]+aby\sin\alpha\cos\alpha=0$$

Dacă scădem ecuaţiunile (7) şi (8), rezultă factorul $r'-r''$, pe care-l suprimăm, şi rămâne:

(11) $$a(x^2+y^2)\cos\alpha+x(b-2a^2)\cos\alpha+$$
$$by\sin\alpha=0$$

Insă ecuaţiunea (10) se scrie:

$$a\cos\alpha\{\cos\alpha[a(x^2+y^2)+x(b-2a^2)]+by\sin\alpha\}+$$
$$b(ax-x^2-y^2)=0.$$

Această ecuaţie însă, în virtutea ecuaţiei (11), se reduce la:

(A) $$x^2+y^2-ax=0$$

care este *cercul descris pe* P O *ca diametru* şi *care e prin urmare locul căutat.*

2. *A doua soluţie analitică.* Luăm de data aceasta centrul cercului fix O, ca origină a două axe perpendiculare, din care Ox trece prin P. Fie A$(R\cos\varphi', R\sin\varphi')$ şi B$(R\cos\varphi'', R\sin\varphi'')$, coordonatele punctelor A şi B, R fiind raza cercului fix de ecuaţie:

$$x^2+y^2-R^2=0.$$

Ecuaţiile cercurilor variabile sunt:

(12) $$x^2+y^2-R^2+\lambda(x\cos\varphi'+y\sin\varphi'-R)=0,$$

(13) $$x^2+y^2-R^2+\mu(x\cos\varphi''+y\sin\varphi''-R)=0$$

Scriind că aceste cercuri trec prin P$(a, 0)$, reese:

$$\lambda=-\frac{a^2-R^2}{a\cos\varphi'-R},\quad \mu=-\frac{a^2-R^2}{a\cos\varphi''-R}$$

Ecuaţiile (12) şi (13) devin atunci:

(14) $$x^2+y^2-\frac{(a^2-R^2)\cos\varphi'}{a\cos\varphi'-R}x$$
$$-\frac{(a^2-R^2)\sin\varphi'}{a\cos\varphi'-R}y+\frac{aR(a-R\cos\varphi')}{a\cos\varphi'-R}=0,$$

(15) $$x^2+y^2-\frac{(a^2-R^2)\cos\varphi''}{a\cos\varphi''-R}x$$
$$-\frac{(a^2-R^2)\sin\varphi''}{a\cos\varphi''-R}y+\frac{aR(a-\cos\varphi'')}{a\cos\varphi''-R}=0.$$

Scriind că punctele A, B, P *sunt în linie dreaptă,* căpătăm relaţiunea:

(16) $$b(\sin\varphi'-\varphi'')+R(\sin\varphi''\cos\varphi'-\sin\varphi'\cos\varphi'')=0$$

pe care o considerăm la patrat, sub forma:

(17) $$a^2[(\sin\varphi'+\sin\varphi'')^2-4\sin\varphi'\sin\varphi'']=$$
$$R^2(\sin^2\varphi'+\sin^2\varphi''-2\sin^2\varphi'\sin^2\varphi''-$$
$$2\sin\varphi'\sin\varphi''\cos\varphi'\cos\varphi'').$$

Ecuaţiile (14) şi (15) ne spun că $\cos\varphi'$ şi $\cos\varphi''$ $\sin\varphi'$ şi $\sin\varphi''$, sun rădăcinile ecuaţiei:

$$(a\cos\varphi-R)(x^2+y^2)-x(a^2-R^2)\cos\varphi-$$
$$y(a^2-R^2)\sin\varphi+Ra(a-R\cos\varphi)=0$$

Această ecuaţie, printr'o ridicare la patrat evidentă, se poate scrie sub una din formele:

(18) $$\sin^2\varphi\{[a(x^2+y^2)-x(a^2-R^2)-aR^2]^2+$$
$$y^2(a^2-R^2)^2\}+2Ry(a^2-R^2)(x^2+y^2-a^2)\sin\varphi+$$
$$R^2(x^2+y^2-a^2)^2-[a(x^2+y^2)-$$
$$x(a^2-R^2)-aR^2]^2=0;$$

(19) $$\cos^2\varphi\{[a(x^2+y^2)-x(a^2-R^2)-aR^2]^2+$$
$$y^2(a^2-R^2)^2\}-2R(x^2+y^2-a^2)[a(x^2+y^2)-$$
$$x(a^2-R^2)-aR^2]\cos\varphi+R^2(x^2+y^2-a^2)^2-$$
$$y^2(a^2-R^2)^2=0$$

Din formulele (18) şi (19) deducem:

(20)
$$\begin{cases}\cos\varphi'\cos\varphi''=\dfrac{R^2(x^2+y^2-a^2)^2-y^2(a^2-R^2)^2}{[a(x^2+y^2)-x(a^2-R^2)-aR^2]^2+y^2(a^2-R^2)^2},\\[2ex]\sin\varphi'+\sin\varphi''=\dfrac{-2Ry(a^2-R^2)(x^2+y^2-a^2)}{[a(x^2+y^2)-x(a^2-R^2)-aR^2]^2+y^2(a^2-R^2)},\\[2ex]\sin\varphi'\sin\varphi''=\dfrac{R^2(x^2+y^2+a^2)^2-[a(x^2+y^2)-x(a^2-R^2)-aR^2]^2}{[a(x^2+y^2)-x(a^2-R^2)-aR^2]^2+y^2(a^2-R^2)^2}.\end{cases}$$

Introducând valorile (20) în (17) şi făcând toate simplificările şi reducerile găsim că locul se descompune în:

$$\text{I)} \quad R^4(x^2+y^2-a^2)^2 = a^2[a(x^2+y^2) - x(a^2-R^2) - aR^2]^2,$$

$$\text{II)} \quad [a(x^2+y^2) - x(a^2-R^2) - aR^2]^2 + y^2(a^2-R^2)^2 - R^2(x^2+y^2-a^2)^2 = 0$$

Ecuaţia (II) se descompune în:

$$(x^2+y^2-R^2)(x^2+y^2-2ax+a^2) = 0,$$

care dă curbele singulare, parazitare şi anume:

$$x^2+y^2-R^2=0; \qquad (x-a)^2+y^2=0;$$

prima e cercul dat şi al doilea ne dă două drepte imaginare sau *un cerc de rază nulă, care e chiar punctul* P; *acest punc aparţine locului.* Punctele de contact ale tangentelor duse din P la cercul fix, cu cercul fix, aparţin şi ele locului.

Ecuaţia (I) se descompune în:

$$\text{(A)} \quad x^2+y^2-ax=0$$

$$\text{(B)} \quad x^2+y^2+\frac{a(R^2-a^2)}{R^2+a^2}x - \frac{2a^2R^2}{R^2+a^2} = 0.$$

Cercul (B) are centrul pe Ox şi e tangent în P, cercului (A); se vede că nu poate forma locul căutat. Rămâne cercul (A) care e acelaş ca la prima soluţie analitică dată mai sus.

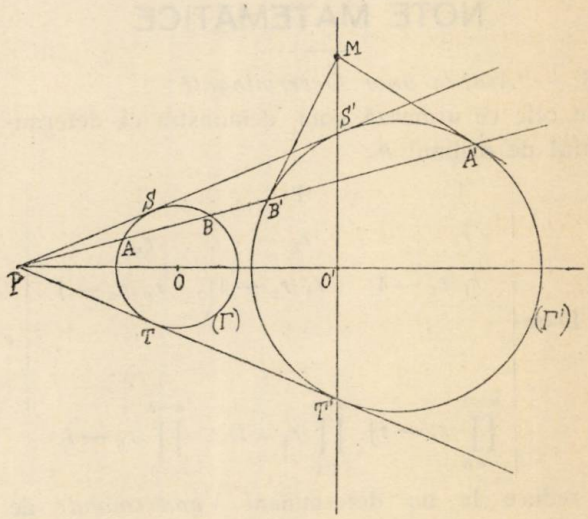
3. *Prima soluţie geometrică.* Fie O centrul cercului fix, P punctul exterior, A şi B punctele de intersecţie ale unei secante variabile duse prin P, cu cercul fix; punctul A îl presupunem cel mai apropiat de P pe această secantă, iar B cel mai depărtat.

Cel de al doilea punct comun al cercurilor din problemă, este simetricul punctului P, în raport cu linia centrelor acestor cercuri. Fie R mijlocul lui PA, şi S mijlocul lui PB. Perpendiculara în R pe PA şi cu OA se întâlnesc în C', centrul cercului ce trece prin P şi e tangent în A cercului fix; perpendiculara în S pe PB (sau PA) şi cu OB, se tae în C'', centrul cercului ce trece prin P şi e tangent în B cercului fix. Fie M simetricul punctului P în raport cu C'C'', numesc Q intersecţia dreptei MP cu dreapta C'C'', şi unesc O cu M. Unesc apoi C' cu P, C'' cu P şi C'' cu M. Am după cum urmează:

$$\widehat{C'OA} = \widehat{C'AP} = \widehat{BAO} = \widehat{ABO}.$$

Prin urmare dreptele C'P şi BC'' sunt paralele. Insă $\widehat{ABO} = \widehat{BPC''}$ şi deci $\widehat{APC''} = \widehat{PAC'}$. De unde rezultă prin urmare că dreptele OC' şi C''P, deasemenea sunt paralele. Prinurmare figura OC'PC'' este un paralelogram şi deci diagonalele C'C'' şi OP se tae în părţi egale şi fie K punctul lor comun. In triunghiul OMP, dreapta QK uneşte mijloacele a două laturi, prinurmare e paralelă cu OM şi egală cu jumătatea ei. De unde rezultă că dreptele OM şi MP sunt perpendiculare, căci şi QK şi MP sunt perpendiculare. Unghiul din M fiind drept, locul punctului M este cercul descris pe OP ca diametru. *Linia centrelor C'C'' a celor două cercuri, trece prin punctul fix* K, *mijlocul lui* OP.

4. *O a doua soluţiune geometrică.* Fie P punctul exterior şi numesc cu (Γ) cercul fix de centru O. Voi face o transformare prin inversiune, luând punctul P ca pol şi o putere oarecare K^2 de inversiune. Atunci cercul (Γ) se va transforma într'un



cerc (Γ'). O dreaptă variabilă ce trece prin P, tae cercul (Γ) în punctele A şi B, şi cercul (Γ') în A', B'. Dreptele ce trec prin P, rămân neschimbate în tranformare, aşa încât punctele A', B' sunt respectiv inversele punctelor A şi B. Cercurile ce trec prin P se transformă în drepte, aşa încât cercurile ce trec prin P şi sunt tangente în

A şi B cercului (I) se vor transforma în dreptele tangenta în A′ şi B′ cercului (I'); aceste drepte se tae în M. Când dreapta P A B se roteşte în jurul lui P, punctul M polul acestei drepte faţă de cercul (I'), va descrie polara punctului P fată de cercul (I'), adică o dreaptă perpendiculară pe P O. Numesc cu S, T apoi cu S′, T′ punctele de contact ale tangentelor duse din P, respectiv la cercurile (I) şi (I') şi numesc apoi cu O′ punctul de intersecţie al dreptei S′ T′, locul lui M, cu linia centrelor P O. Se ştie că O′ este inversul lui O, centrul cercului (I) şi S′, T′ sunt inversele punctelor S, T respectiv. Să ne întoarcem înapoi acum. Dreapta, loc al punctului M se va transforma într'un cerc ce trece prin P, şi cu centrul pe P O; evident că acest cerc va trece şi prin punctele S, T, O cari sunt transformatele punctelor S′, T′, O′ pe unde trece dreapta, loc al punctului M. Propoziţia e prin urmare demonstrată şi pe această cale.

In legătură cu această chestiune, s'ar mai putea cerceta şi alte probleme foarte interesante. Dar asupra lor cu altă ocazie.

NOTE MATEMATICE

8. — *Asupra unor Determinanţi.*

In cele ce urmează vom demonstra că determinantul de ordinul n:

$$(1)\quad D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1(r_1-1) & r_2(r_2-1)\dots & & r_n(r_n-1) \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ \prod_{i=0}^{n-2}(r_1-i) & \prod_{i=0}^{n-2}(r_2-i)\dots & & \prod_{i=0}^{n-2}(r_n-i) \end{vmatrix},$$

se reduce la un determinant *Vandermonde* de acelaşi ordin. Pentru aceasta vom arăta în primul rând că termenii unei linii oarecare, se pot exprima liniar în funcţie de termenii liniilor precedente, anume:

$$(2)\quad r_i(r_i-1)\dots(r_i-k+2)=r_i^{k-1}-A_{k,1}\,r_i-A_{k,2}\,r_i(r_i-1)\dots.-A_{k,k-2}\,r_i(r_i-1)\dots(r_i-k+3),$$
$$(i=1,2,\dots n,\quad j=1,2,\dots n-1),$$

unde coeficienţii $A_{k,1}, A_{k,2}, \dots A_{k,k-2}$ se pot uşor determina.

Astfel dacă în (2) facem pe rând $r_i=1,2,\dots k-2$, obţinem următoarele relaţiuni:

$$\begin{cases} A_{k,1}=1 \\ A_{k,2}+A_{k,1}=2^{k-1} \\ 2!\,A_{k,3}+2\,A_{k,2}+A_{k,1}=3^{k-1} \\ A_{k,k-2}+A_{k,k-3}+\dfrac{1}{2!}A_{k,k-4}+ \\ \dots+\dfrac{1}{(k-1)!}A_{k,1}=\dfrac{(k-2)^{k-2}}{(k-3)!} \end{cases}$$

Avem astfel un sistem recurent de $k-2$ ecuaţiuni liniare, care ne dă pe rând valorile:

$$(3)\quad \begin{cases} A_{k,1}=1 \\ A_{k,2}=2^{k-1}-1 \\ A_{k,3}=\dfrac{3^{k-1}-1}{2}-2^{k-1}-1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dezvoltarea (2) este estfel motivată, coeficienţii ei fiind daţi de relaţiile (3).

Acestea fiind stabilite să ne reintoarcem la determinantul (1) şi să vedem cum îl putem reduce la un determinant *Vandermonde*. Pentru aceasta vom folosi proprietatea cunoscută.

Valoarea unui determinant nu se schimbă, dacă adunăm elementelor unei linii, elementele altor linii multiplicate respectiv cu câte un factor.

Astfel în determinantul (1) adunăm elementelor liniei n, elementele liniilor $2, 3, \dots (n-1)$ înmulţite respectiv cu $A_{n,1}, A_{n,2}, \dots A_{n,n-2}$ şi ţinând seamă de relaţiile (3) obţinem:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ r_1 & r_1 & & r_n \\ r_1(r_1-1) & r_1(r_1-1 & & r_n(r_n-1) \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ \prod_{i=0}^{n-1}(r_1-i) & \prod_{i=0}^{n-3}(r_2-i) & & \prod_{i=0}^{n-3}(r_n-1) \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Procedăm analog cu elementele din linia $n-1$, apoi cu acelea din celelalte linii $n-2, n-3, \ldots$ până la acelea din linia 3 inclusiv, şi e uşor de observat că obţinem în definitiv:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Vedem astfel că determinantul D s'a redus la un determinant *Vandermonde*.

Observare. Ţinând seamă că:

$$(4) \qquad r_i(r_i-1)\ldots(r_i-k+2) = r_i^{k-1} - B_{k,1}\, r_i^{k-2} + B_{k,2} - \ldots \pm B_{k,k-1},$$

unde:

$$(5) \quad \begin{cases} B_{k,1} = 1+2.+\ldots+k-2, \\ B_{k,2} = 1.2+1.3+\ldots+1.(k-2)+ \\ \quad 2.3+2.4+.\ ,+(k-3)(k-2) \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{k,k-1} = (k-2)! \end{cases}$$

putem proceda şi astfel: Adunăm în determinantul (1), la elementele liniei 3, elementele liniei 2 şi scrim determinantul astfel format; în acest determinant adunăm elementelor liniei 4, elementele liniei 3 înmulţite cu 3 şi acelea ale liniei 2 înmulţite cu -2 şi scrim determinantul astfel format. Procedăm la fel cu celelalte linii, ţinând seamă de (5) şi ajungem şi pe calea aceasta la un determinant *Vandermonde*.

V. ALACI

---

9. — *Asupra unui exerciţiu.*

In cele ce urmează îmi propun să dau câteva soluţiuni interesante — ne întâlnite — unui cunoscut exerciţiu. Anume: *Să se arate că într'un triunghiu dreptunghiu avem:*

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{c+a}{b}$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

Soluţia I-a. Fie ABC un triunghiu dreptunghiu oarecare BD bisectoarea unghiului B şi E proecţia punctului D pe ipotenuza BC.

Din triunghiul ABD avem succesiv:

$$(1) \qquad \operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{AB}{AD} = \frac{c}{b-\overline{DC}}$$

Iar din triunghiul BDE, în care $\sphericalangle CDE = \sphericalangle B$ avem:

$$(2) \quad \operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{BE}{DE} = \frac{a-EC}{DE} = \frac{a-DC\sin B}{DC\cos B}$$

Scoţând pe DC din (1) şi (2) obţinem respectiv:

$$(3) \qquad DC = \frac{b\operatorname{cotg}\frac{B}{2} - c}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}$$

$$(4) \qquad DC = \frac{a}{\sin B + \cos B \operatorname{cotg}\frac{B}{2}}$$

Din comparaţia egalităţilor (3) şi (4) deducem egalitatea:

$$(5) \qquad \frac{b\operatorname{cotg}\frac{B}{2} - c}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} = \frac{a}{\sin B + \cos B \operatorname{cotg}\frac{B}{2}}$$

Făcând înlocuirile $\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$ şi aducând la numitor comun obţinem ecuaţia:

$$b\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2} - 2c\operatorname{cotg}\frac{B}{2} - b = 0$$

pe care rezolvându-o primim rădăcinile:

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2+b^2}}{b}, \qquad \text{dar } c^2+b^2 = a^2$$

şi deci:

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{c+a}{b}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{c-a}{b}$$

cum $c < a \therefore c-a < 0$ urmează $\frac{B}{2}$ mai mare ca 90^0 şi deci $B > 180^0$. Deci soluţia doua nu corespunde şi ne rămâne

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{c+a}{b}$$

Soluţia II-a. Ştim din geometrie că bisectoarea unui unghiu a triunghiului împarte latura opusă în segmente proporţionale cu laturile unghiului considerat.

Deci avem:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{c}{a}$$

sau aplicând o proprietate a proporţiilor avem:

$$\frac{AD}{AD+DC}=\frac{c}{a+c}$$

dar:

$$AD=c\,tg\,\frac{B}{2}, \qquad AD+DC=b$$

aşa că avem:

$$\frac{c\,tg\,\frac{B}{2}}{b}=\frac{c}{a+c}\,;\quad \frac{1}{tg\,\frac{B}{2}}=cotg\,\frac{B}{2}=\frac{a+c}{b}$$

Soluţia III-a. Din B ca centru şi cu o rază egală cu unitatea descrim un cerc, care întâlneşte pe AB în E iar pe BC în F. Bisectoarea unghiului B întâlneşte pe AC în D, iar tangenta în E la cerc pe BD în G. Paralela dusă prin F la AB întâlneşte pe BD în H, şi fie K proecţia lui H pe AB.

Din triunghiurile asemenea BEG, BKH avem:

$$\frac{EG}{BE}=\frac{HK}{BK},$$

sau:

$$(1)\qquad \frac{tg\,\frac{B}{2}}{1}=\frac{\sin B}{\cos B+1}$$

căci proectând F pe AB în M avem:

$$HK=FM=\sin B\,,$$

iar $$BK=BM+MK=\cos B+FH$$

dar $FH=1$ fiindcă se vede uşor că triunghiul BFH este isoscel.

Inversând (1) obţinem:

$$\frac{1}{tg\,\frac{B}{2}}=cotg\,\frac{B}{2}=\frac{\cos B+1}{\sin B}=\frac{\frac{c}{a}+1}{\frac{b}{a}}=\frac{c+a}{b}$$

ST. MUSTA

10. — *Asupra notei lui* (†) *Traian Dordea.* „R. M. T." an. XI, No. 2, pag. 15-16.

Relativ la cele cuprinse în această notă în rândurile: „Primii însfârşit care se folosesc de semnul actual + sunt anglo-saxonii, aceştia îl întrebuinţau nu ca semn al adunării ci ca semn al excesului. De abia în secolul al XVII pe la 1630, semnul + trece ca semn al operaţiunei adunării aşa cum îl avem azi", d-l *P. Caranachi*, aduce următoarele interesante precizări şi rectificări: „Atât semnul +, cât şi semnul —, cu semnul actual al acestor semne au apărut, pentru prima oară (în cărţi tipărite; în manuscrise se întâlnesc şi mai înainte), în prima aritmetică tipărită, aritmetica lui *Johann Widman. „Behede und hubsche Rechnung auff allen Kaufmannschaft"*, Leipzig, 1489, deci încă pe la sfârşitul secolului al XV. Această dată este indicată în cartea *„History of mathematical notations,* by *Florian Cojori,* vol I, pag. 232. publicată în 1928. Tot acolo se găsesc foarte multe date interesante despre diferite semne matematice. Dl profesor *P. Cazanachi* ne promite să revină cu o notă asupra acestor chestiuni; o aşteptăm şi o vom publică cu plăcere.

V. A.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Natematică*, anul XXXVI, No. 9, Mai 1931. Quelques propriétés du triangle, par *V. Thébault.* Premiul *„Inginer H. Capriel"*.

2. *Boletin Matematico*, anul IV, No. 1, Martie, 1931. Reprezentarea grafică a unei clase de funcţiuni discontinue, de *F. Montero Bustamante.* Consideraţiuni didactice asupra unui cas particular a diviziunii polinoamelor, de *S. J. Pillado.*

3. Buletinul *"Societăţii de Matematici„* a clasei a IV-a a liceului *„Tasse Dumitrescu"* din Mizil. Cuprinde o succintă dare de seamă a activităţii matematice a elevilor din clasa IV, a liceului din Mizil, pentru care avem cuvinte de laudă şi de încurajare.

4. *Miron Nicolesco.* Sur un théorème de *M. Pompeiu.*

5. *Miron Nicolesco.* Sur les équations différentielles linéaires.

6. *Miron Nicolescu.* Sur les nombres complexes à quatre coordonéès.

7. *Miron Nicolesco.* Applications d'un développemert en série.

8. *Miron Nicolescu.* Sur quelques systémee aux dérivées partielles.

9. *Miron Nicolesco.* Sur certaines transformations ponctuelles de l'espace à quatre dimensions.

10. *Miron Niholesco.* Sur le théorème,de *Sturm.*

11. *Miron Nicolesco.* Sulle funzioni metaarmoniche în *n* variabili.

12. *Miron Nicolesco.* Sur les fonctions conjuguées sur une surface, au sens de *Beltrami.*
13. *Miron Nicolescu.* Sur l'intégration orientée des équations différentielles non analytiques.
14. *Miron Nicolesco.* Théorèmes de moyenne pour les fonctions de deux variables réelles.
15. *Miron Nicolesco.* Fonctions complexes dans le plan et dan l'espace. (Thése).

PROBLEME REZOLVATE

902. — *Să razolve sistemul:*

$$\begin{cases} a\sin(\operatorname{arc\,tg} x) + b\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = k_1 \\ \operatorname{arc\,t} x + \operatorname{arc\,tg} y = k_2\pi \end{cases}$$

ION N. ARGINEANU

Dacă notăm:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arc\,tg} x = u, \qquad \operatorname{arc\,tg} y = v,$$

sistemul dat devine:

$$\begin{cases} a\sin u + b\cos v = k_1 \\ u + v = k_2\pi \end{cases}$$

Prima ecuaţie o putem scri:

$$\text{(2)} \qquad \sin u + \frac{b}{a}\cos v = \frac{k_1}{a},$$

şi determinând un unghiu φ, astfel ca:

$$\text{(3)} \qquad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi,$$

ecuaţia (2) devine:

$$\sin(u+\varphi) = \frac{k_1}{a}\cos\varphi$$

$$\therefore \quad u = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{k_1}{a}\cos\varphi\right) - \varphi, \qquad \text{şi deci}$$

$$v = k_2\pi + \varphi - \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{k_1}{a}\cos\varphi\right)$$

Inlocuind aceste valori în (1) deducem uşor:

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{k_1}{a}\cos\varphi\right) - \varphi\right] \\ y = \operatorname{tg}\left[k_2\pi + \varphi - \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{k_1}{a}\cos\varphi\right)\right] \end{cases}$$

unde vom inlocui:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

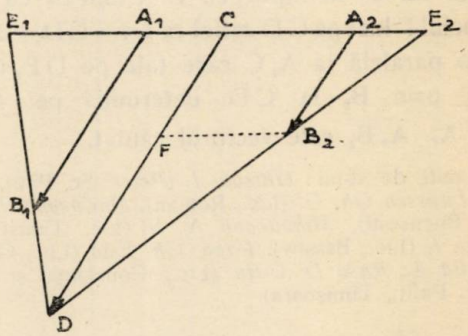
obţinnute din (3).

Soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (Lic. Milit., Iaşi), *Antonescu P. Aurel* (Sc. Polit., Bucureşti), *Bâcicov P. Boris* (student, Iaşi), *Cuciureanu Ştefan* (Lic. Milit, Iaşi), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Şc. Polit., Bucureşti), *Deac Iuliu* (Turda), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ghilezan Aurel* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ionescu P. Haralamb* (Oltenita), *Marşteu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Conştanţa), *Negrea A. Mircea Lsonte* (student, Bucureşti), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Savin C. Ion* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Şaar Ioan* (Şc. Polit., Timişoara).

930. — *Fie* $\overline{A_1B_1}$ *şi* $\overline{A_2B_2}$ *doi vectori paraleli iar* $\overline{CD}$ *vectorul lor rezultant. Cousiderând intersecţiile* $E_1(\overline{A_1A_2}, \overline{DB_1})$ *şi* $E_2(\overline{A_1A_2}, \overline{DB_2})$, *să se arate că* $\overline{E_1C} = \overline{CE_2}$.

JUSTIN N. VALCEANU

Cei doi vectori pot fi de acelaş sens sau de sens contrar. Luăm primul caz.



Din triunghiurile asemenea $B_1E_1A_1$ şi DEC, $B_2E_2A_2$ şi DE_2C avem:

$$\frac{\overline{E_1A_1}}{\overline{E_1C}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{CD}}, \qquad \frac{\overline{E_2A_2}}{\overline{E_2C}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{CD}}$$

sau:

$$\frac{\overline{E_1C} - \overline{E_1A_1}}{\overline{E_1C}} = \frac{\overline{CD} - \overline{A_1B_1}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{\overline{E_2C} - \overline{E_2A_2}}{\overline{E_2C}} = \frac{\overline{CD} - \overline{A_2B_2}}{\overline{CD}}$$

şi cum avem:

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} = \overline{CD},$$

rezultă:

$$\frac{\overline{A_1C}}{\overline{E_1C}}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{CD}},\qquad \frac{\overline{A_2C}}{\overline{E_2C}}=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{CD}}$$

Impărţind aceste relaţii, avem:

$$(1)\qquad \frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_2C}}\cdot\frac{\overline{E_2C}}{\overline{E_1C}}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}$$

Fiindcă că însă avem:

$$\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_2C}}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}},$$

rezultă din (1):

$$\overline{E_1C}=\overline{E_2C}$$

Demonstraţie analoagă când vectorii $\overline{A_1B_1}$ şi $\overline{A_2B_2}$ ar fi paraleli şi de semne contrare.

Observare importantă a autorului. Din proprietatea de mai sus rezultă următoarea construcţie grafică pentru diferenţa a 2 vectori paraleli şi de sens contrar, CD şi A_1B_1.

Fie E, intersecţia dreptelor DB_1 şi CA_1 şi E_2 simetricul lui E_1 în raport cu C. Unim E_2 cu D şi prin punctul F luat pe CD astfel ca $CF=CD-A_1B_1$ ducem o paralelă la A_1C care taie pe DE_2 în B_2. Paralela prin B_2 la CD determină pe A_1C_1 punctul A_2. $\overline{A_2B_2}$ este vectorul căutat.

Soluţii date de d-nii: *Ghişoiu I.* (*Petre* Şc. Polit. Bucureşti), *Lupescu Gh. C.* (Lic., Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Purdilă A.*, *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa) şi *Rusu Liviu* (Şc. Polit., Timişoara).

940. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z=10\\ x^3+y^3+z^2-2xyz=100\\ xy(x^3z+y^3z+z^4)=4800 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Ecuaţia a 3-a se poate scri:

$$xyz(x^3+y^3+z^3)=4800,$$

sau ţinând seamă de ecuaţia 2-a, avem:

$$xyz(100+2xyz)=4800$$

$$\therefore\qquad (xyz)^2+50xyz-2400=0$$

Rezolvând această ecuaţie de gradul al doilea în xyz, obţinem:

$$xyz=30 \qquad \text{şi} \qquad xyz=-80$$

Sistemul dat este deci echivalent cu sistemele:

$$(1)\begin{cases} x+y+z=10\\ x^3+y^3+z^2=160\\ xyz=30 \end{cases}\qquad \begin{cases} x+y+z=10\\ x^3+y^3+z^3=-60\\ xyz=-80 \end{cases}$$

1. Să rezolvăm sistemul (1). Putem scri:

$$x+y=10-z$$

$$\therefore x^3+y^3+3xy(x+y)=1000-300z+30z^2-z^3$$

Ţinând seamă de ecuaţiile întâia şi a 2-a din (1), avem:

$$160+3xy(10-z)=1000-300z+30z^2$$

$$\therefore\qquad 30z^2-300z-30xy+3xyz+840=0$$

Având în vedere ecuaţia 3-a şi simplificând cu 30, avem:

$$(1)\qquad z^3-10z^2+31z-30=0$$

Mai putem scri:

$$(z-3)(z^2-7z+10)=0$$

De aci deducem:

$$z_1=2,\qquad z_2=3,\qquad z_3=5$$

Sistemul dat fiind simetric în raport cu x, y, z, înseamnă că am fi obţinut aceiaşi ecuaţie (1) în x sau în y, dacă procedând analog, am fi eliminat din sistemul dat y, z sau x, z. In consecinţă rezultă că rădăcinele 2, 3, 5 sunt într'o ordine oarecare tocmai valorile lui x, y, z, astfel că sistemul (1) deci şi cel dat, admite următoarele şase sisteme de soluţii, scrise în acest tablou:

x	2	2	3	3	5	5
y	3	5	2	5	2	3
z	5	3	5	2	3	2

2. Trecem la sistemul (2), avem:

$$x+y=10-z,$$

deci:

$$x^3+y^3+3xy(10-z)=1000-300z+30z^2-z^3$$

Ţinând seamă de ecuaţia 2-a şi a 3-a din sistemul)2), avem :

$$-60+30xy+240=1000-300z+30z^2$$

$$\therefore \qquad 3z^3-30z^2+82z+240=0.$$

Notând cu $f(z)$ primul membrul, găsim :

$$f(-1,7)=-0,839, \quad f(-1,6)=19,712$$

Putem lua deci, $z=-1,7$ cu o aproximaţie de o zecime.

Atunci rezultă :

$$\begin{cases} x+y=11,7 \\ xy=47,5 , \end{cases}$$

de unde :

$$x=\frac{-11,7+\sqrt{-53,11}}{2},$$

$$y=\frac{-11,7-\sqrt{-53,11}}{2}.$$

Permutând cele 3 valori găsite pentru x, y, z, avem şi aci şase sisteme de soluţii.

Au găsit numai soluţiile întregi din tabloul de mai sus d-nii: *Băleanu N.* (L. Milit., Craiova), *Beral H.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Boerescu P. Gheorghe* (Lic., Oltenita), *Crivăţ Vladimir* (Bucureşti), *Derenbaum M.*, *Dini Ion* (Lic., Craiova), *Grinberg N. Meer* (Lic., Tighina), *Iliescu M. Emilian* (Lic. Milit.. Craiova), *Ioaniu C. Gh.* (Lic., Craiova), *Lupescu Gh.* C. (Lic., Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu N.* (Lic, Constanţa), *Milea G. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Parepeanu C. I.* (Lic, Braşov), *Pănoiu E. Emanoil* (Lic.. Craiova), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Constanţa), *Savin C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), *Ţiucra P. Mircea* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic. Constanţa).

945 — *Două cercuri ortogonale* O *şi* O′ *se intersectează în* A *şi* B. *Din* A *se duc diametrele* A C *şi* A D *respectiv în cercurile* O *şi* O′. *Tangenta în* C *la cercul* O *se intersectează cu* O O′ *în* E. *Tangenta dusă din* E *la cercul* O *se intersectează cu* A D *în* F *şi atinge cercul O în* G. *Să se demenstreze că :*

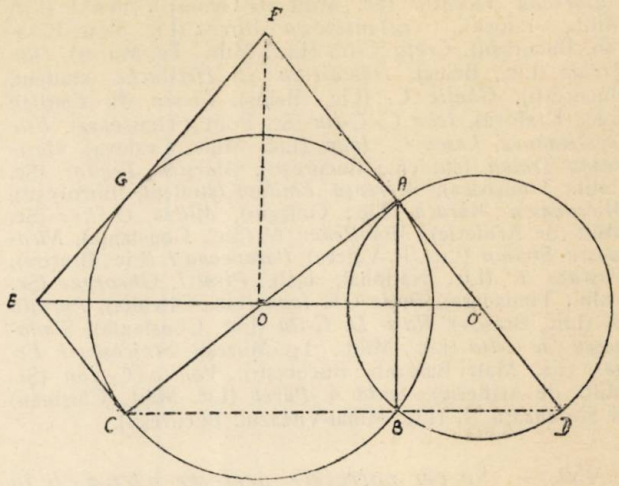
1°. *Triunghiul* E F O′ *este isoscel.*

2°. F O *este perpendiculară pe* E O′.

3°. *Segmentul* C B D *este egal şi paralel cu* E O′.

VLADIMIR I. CRIVATZ

Construim figura conform enunţului.



1°. Triunghiurile dreptunghice O C E şi O B O′ sunt egale, având unghiurile din O egale şi O C = O A ca raze în cercul O. Rezultă :

(1) E O = O O′ şi (2) E C = A O′.

Privind tangentele duse din E şi F la cercul O, ştim că putem scri :

(3) E C = E G, (4) F G = F A

Adunând relaţiile (2) şi (4), ţinând seamă de (3), avem :

$$FG+EC=FA+AO'$$

sau :

(5) $$FG+EG=FA+AO'$$

Privind figura, relaţia (5), devine :

$$EF=O'F,$$

deci triunghiul E F O′ este isoscel.

2°. Fiindcă am arătat că, E O = O O′ şi triunghiul E F O′ este isoscel, rezultă că mediana F O este şi înălţime, deci F O este perpendiculară pe E O′.

3°. Fiindcă :

$$EC=AO'=O'D,$$

şi aceste drepte E C şi O′ D sunt paralele, ambele fiind perpendiculare pe A C, rezultă că patrulaterul C E O′ D este un paralelogram şi deci

CD este egală şi paralelă cu EO′

Soluţii date de d-nii: *Beral Haim* (Lic. Naţional, Iaşi), *Bujoreanu Vicenţiu* (Şc. Milit. de Geniu), *Chivu I.* (Lic. Milit., Craiova), *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Creţu C-tin* (Lic., Milit, Tg.-Mureş), *Dan Traian* (Lic., Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Gheţie C.* (Lic., Beiuş), *Iliescu M. Emilian* (Lic., Craiova), *Jeba C. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Jijie Ives-Rahova*, *Lascu C. Ioan* (Lic. Milit, Craiova), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Micsunescu Măruca* (Lic., Giurgiu), *Millea G. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Parepeanu I.* (Lic, Braşov), *Pascaru I.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Pisai I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic, Constanţa), *Simionescu G. C-tin* (Lic Milit., Tg.-Mureş), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Vonica C. Ion* (Şc. Milit. de Artilerie), *Sullă A. Pavel* (Lic. Milit., Chişinău) şi *Ştefănescu A.* (Lic. Mihai-Viteazul. Bucureşti).

952. — *Se cer patratele perfecte a b b a c b în care a b este un bipatrat.*

EMILIAN MEREUTA

Singurile bipatrate de două cifre sunt 16 şi 81, deci patratele cerute sunt de formele:

$$1661\,c\,6 \qquad \text{şi} \qquad 8118\,c\,1$$

Ţinând seamă de ultimele două cifre cu care se termină un patrat perfect:

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44,

49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96,

rezultă pentru c respectiv valorile:

$$c = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \quad \text{şi} \quad c = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8.$$

Deci patratele cerute sunt printre numerile:

166116	811801
166136	811821
166156	811841
166176	311861
166196	811881

Dintre acestea, 166116 şi 811821 nu sunt patrate perfecte fiind divizibile cu 3, fără a fi şi cu 9, iar dintre cele rămase numai 811801, este patrat perfect.

$$811801 = 901^2,$$

şi formează singura soluţie.

Soluţii date de d-nii: *Băleanu N.* (Lic. Milit., Craiova), *Beral Haim* (Lic. Naţional, Iaşi), *Constantinescu Mircea* (Bucureşti), *Costăchescu Teodor*, *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Dimitrescu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Dini S.* (Lic. Milit., Craiova), *Grinberg N. Meer* (Lic., Thigina), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marcu Aureliu* (Şc. Polit. Timişoara), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mehedinţi D.* (Lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Milea G. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Nicolescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Popa Gh. Ion* (Lic., Oltenita), *Purdilă Anton* (Lic, Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Sâmbotin Gh.*, *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic. Constanţa).

968. — *Să se afle patratul de cinci cifre, ştiind că diferenţa între cifra a doua şi a patra este egală cu cătul între aceste cifre, iar numărul format din cifrele a cincia şi a doua este egal cu de şase ori suma cifrelor sale. Numărul format de cifrele întâia, a cincia şi a treia este un multiplu de 5, care divizat prin 5 dă drept cât numărul format de cifrele a cincea şi a treia.*

G. SAMBOTIN

Fie $a\,b\,c\,d\,e$ patratul de cinci cifre cerut. Conform enunţului, avem:

$$(1) \qquad b - d = \frac{b}{d}$$

$$(2) \qquad e\,b = 6\,(e + b)$$

$$(3) \qquad \frac{a\,e\,c}{5} = e\,c$$

Luând în considerare relaţia (2) vedem că $e\,b$ este multiplu de 6 şi deci poate fi:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54,

60, 66, 72, 78, 84, 90, 96,

dintre care singur 54 satisface relaţia (2), rezultă:

$$(4) \qquad e = 5, \qquad b = 4.$$

Ţinând seamă de (4), relaţia (1) devine:

$$4 - d = \frac{4}{d}$$

care nu poate fi satisfăcută de cât pentru:

$$(5) \qquad d = 2.$$

Privind relaţia (3), unde se vede că $a\,e\,c$ este multiplu de 5, rezultă $c = 0$ sau $c = 5$ şi ţinând seamă că $e = 5$, relaţia (3) ne dă:

$$a\,50 = 5 \times 50 = 250$$

$$a\,55 = 5 \times 55 = 275$$

Dintre aceste două relaţii, numai prima este satisfăcută pentru $a = 2$.

Rezultă că numărul $abcde$ nu poate fi decât, 24025, care fiind şi patrat perfect, căci:

$$24025 = 155^2$$

este singura soluţie.

Observare. Am fi găsit aceiaşi soluţie, dacă înlăturam din enunţ condiţia ca numărul $abcde$ să fie patrat perfect.

Soluţii date de d-nii: *Beral H.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Boerescu G.* (Lic., Oltenita), *Ceausescu Vasile* (Lic. Milit.-Iaşi), *Constantinescu Mircea* (Lic., Matei-Basarab, Bucureşti), *David M.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Gheorghe Valeriu* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Grinberg N. M.* (Tighina), *Joaniu C. Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Lupescu Gh. C.* (Lic., Roman), *Marcu Aureliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Marsieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mecu I. Ilie* Lic. Cantemir, Bucureşti), *Mehedinţi D.* (Lic. Milit. Tg.-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Millea Ene* (Şc. Milit., de Artilerie), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Parepeanu I., Pascaru I.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Pănoiu E.* (Lic. Carol, Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita). *Pardilă Anton* (Lic., Braşov), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic. Constanţa).

972. — *Să se afle patratal perfect de patru cifre distincte, astfel că schimbând ordinea cifrelor de raug nepereche să ne dea tot un patrat perfect care scăzut din primul ne dă un număr în care cifra a doua şi a treia sunt cifrele întâia şi a doua a primului patrat, iar celelalte sunt tot distincte.*

STAVRACHE TEODORESCU

Fie $abcd$ patratul cerut. Conform enunţului, avem:

(1) $$abcd - cbad = eabf$$

Cifra unităţilor d, fiind aceiaşi rezultă $f = 0$ şi (1) devine:

$$100a + 10b + c - 100c - 10b - a = eab$$

$$\therefore \quad 99(a - c) = eab$$

eab fiind multiplu de 99, poate fi:

99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891

In toate cazurile rezultă $a = 9$. Apoi ultimele două cifre ale unui patrat perfect fiind:

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96

şi cum $cb9d$ este patrat perfect, rezultă $d = 6$, şi (1) devine:

(2) $$9bc6 - cb96 = e9b0$$

Cum şi $9bc6$ este patrat perfect, rezultă privind ultimele două cifre ale unui patrat perfect că:

(3) $$c = 1, 3, 5, 7.$$

In (2) observând că $c < 9$, căci $c = 9$ ar da $b = 0$ ceia ce nu se poate, rezultă efectuând scăderea:

$$c + 10 - 9 = b$$

$$\therefore \quad c + 1 = b.$$

Cum b este diferit de 0, 6, 9 conform enunţului, rezultă privind valorile lui c din (3):

$$c = 1, \qquad b = 2$$

$$c = 3, \qquad b = 4$$

$$c = 7, \qquad b = 8$$

Patratul cerut $abcd$ poate fi:

9216, 9436, 9876

Dintre aceste numere numai 9216 este patrat perfect:

$$9216 = 96^2,$$

cum şi 1296 este patrat perfect:

$$1296 = 36^2,$$

rezultă că 9216 este singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Boerescu P. George* (Lic., Oltenita), *Costăchescu C. C-tin* (Lic. Milit., Iaşi), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Marsieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanţa), *Millea E. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Nagler Meyer* (Lic., Naţional, Iaşi), *Parepeanu C. I.* (Lic., Braşov) *Popa Gh. Ion* (Lic., Oltenita), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic. Constanţa), *Sâmbotin Gh., Şerban Teodor* (Lic. Milit., Iaşi) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic. Constanţa).

980. — *Se cere patratul perfect $abcdea$ în care b, d, e, c sunt cifre consecutive în ordinea dată, iar ba este un patrat perfect.*

VLADIMIR I. CRIVAT

Conform enunţului ba fiind patrat perfect poate fie:

(1) 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81

Ţinând seamă de (1) şi de faptul că b, d, e, c sunt cifre consecutive descrescătoare, putem construi următorul tablou, care pe coloane cuprinde valorile posibile pentru b, d, e, c, a:

b	3	4	6	8
d	2	3	5	7
e	1	2	4	6
c	0	1	3	5
a	6	9	4	1

Reese din acest tablou că numărul $abcdea$ ar putea fi:

630216, 941329, 463544, 185761

Dintre aceste numere numai 185761 este patrat perfect:

$$185761 = 431^2$$

și constitue astfel singura soluție.

Soluții date de d-nii: *Boerescu P. George* (Lic., Oltenița), *Dini Ion* (Lic. Milit., Craiova), *Dumitriu Gh. C-tin* (Lic. Național, Iași), *Gandrabura Al.* (Student, Cluj), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Manasiu D-triu*, *Marcu Aureliu* (Șc. Polit. Timișoara), *Mereuța Emilian* (București) *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanța), *Millea G. Ene* (Șc, Milit. de Artilerie), *Nagler M.* (Lic. Național Iași), *Parepeanu I* (Lic., Brașov), *Păunescu N.* (Lic. Milit., Craiova), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenița), *Popa N.* (Lic., Constanța), *Popescu C. Ștefan* (Lic., Milit., Craiova), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanța), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Milit., București), *Valeriu Gheorghe* (Lic., Milit. Tg.-Mureș) și *Weissmann Mauriciu*.

PROBLEME PROPUSE

1005. — Să se găsească numerile întregi M, N, P, Q, R, S de câte trei cifre fiecare și numărul A de șase cifre, care să satisfacă simultan următoarele șase egaltăți:

$$A = MN: \qquad 2A = PQ; \qquad 3A = RS$$

$$6A = NM; \qquad 5A = QP \qquad 4A = SR,$$

în care MN, ... înseamnă numărul ce se obține scriind pe N după M.

COL. GH. BUICLIU

1006. — Să se demonstreze că numărul:

$$N = 11\ldots11288\ldots8896,$$

care are n cifre egale cu 1 și $n-1$ egale cu 8, este patrat perfect.

SUB.-LT. AURELIAN STAN

1007. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{x(y+2)} + \sqrt{y(x-2)} = 2 \\ (xy-2)^2 + 2xy(x-y) = 5 \end{cases}$$

TEODOR MARSIEU

1008. — Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{yz} + \dfrac{y}{xz} + \dfrac{z}{xy} = \dfrac{67}{75} \\ (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 = 458 \\ (x+y+z)^2 - x(y+z) - y(x+z) - z(x+y) = 134 \end{cases}$$

EMILIAN MEREUTA

1009. — Se dă cercul O, diametrul AB și coarda CD. Fie C_1D_1 proecția lui CD pe AB și M mijlocul coardei CD. Dreapta MC_1 taie diagonala AD în E și MD_1 pe CB în F. Să se demonstreze că patrulaterul CDEF este asemenea cu patrulaterul ABCD.

SUB.-LT. GH. ZAMFIRESCU

1010. — Se dau două cercuri O_1, O_2 tangente exterioare în T. Prin T se duce o secantă arbitrară care întâlnește cercurile O_1, O_2 a doua oară, în punctele A, B. Dacă secanta AB variază în jurul lui T, se cere:

1°. Locul mijlocului segmentului AB

2°. Locurile centrelor de greutate ale triunghiurilor O_1AT. O_2BT.

CEZAR COSNITA

1011. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească identitatea:

$$\Sigma\left(\sec\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) = \frac{r\sqrt{r}}{s}\,\Sigma\, r_a\sqrt{\frac{r_a}{bc}}$$

N. MIHAILEANU

1012. — Intr'un carton circular omogen de centru O, se duc doi diametri perpendiculari AB și CD, apoi se face o deschidere circulară, cercul scos fiind cercul O_1 înscris în triunghiul ABC. Se cere să se afle centrul de greutate G al cartonului rămas. Se va calcula distanța OG în funcție de raza a a cercului dat.

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — D.c. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*. Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Răspundem pe această ca'e, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, de sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu.*

Acei dintre corespondenții noștrii care doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Rugăm a ni se trimete de urgență costul abonamentului pentru „R. M. T." pe anul XI.

ANUL XI. 15 IULIE 1931 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 VIRGIL CLAUDIAN ASUPRA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE

2. NOTE MATEMATICE: 11, 12, 13

3. BIBLIOGRAFIE

4. PROBLEME REZOLVATE: 928, 943, 946, 950, 957. 958, 960, 962, 973, 975, 981

5. PROBLEME PROPUSE: 1013-1022

6. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de arte grafice „Tipografia Românească

Avem plăcerea de a anunţa că începând din luna Iulie 1931, face parte din Comitetul Revistei Matematice şi d-l **Sub-Lt Costăchescu D. C** Ofiţer de Marină, Constanţa.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei.

ANUL XI— NO. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1931

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE

de VIRGIL CLAUDIAN

In *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, pagina 58 – 61, s'a studiat următoarea problemă:

Să se găsiască înfăşurătoarea dreptei. care uneşte polurile unei drepte ce trece printr'un punct fix, în raport cu două conice fixe din plan.

In rândurile de mai jos îmi propun să dau o soluţie analitică mai generală ca cele date în Gazeta Matematică, din care se poate citi poziţia curbei înfăşurătoare. Fie cele două conice:

$$(1)\qquad A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0,$$

$$(2)\qquad A_2x^2+2B_2xy+C_2y^2+2D_2x+2E_2y+F_2=0.$$

Fie apoi $M(a,b)$ punctul fix, şi:

$$(3)\qquad y-b=\lambda(x-a)$$

ecuaţia dreptei variabile ce trece prin M; fie $P(x_0, y_0)$ şi $Q(x_1, y_1)$ polurile dreptei (3) faţă de conicele (1) şi (2) respectiv; fie apoi:

$$(4)\qquad ux+vy+w=0,$$

ecuaţia dreptei PQ care uneşte cele două poluri. Trebue să găsim înfăşurătoarea dreptei (4).

Avem însă:

$$(5)\qquad ux_0+vy_0+w=0,$$

$$(6)\qquad ux_1+vy_1+w=0.$$

Vom scrie acum că polarele punctelor P şi Q în raport cu cele două conice respectiv, sunt identice cu dreapta (3). Polarele punctelor P şi Q în raport cu conicele (1) şi (2) au respectiv ecuaţiile:

$$(7)\quad x(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+y(B_1x_0+C_1y_0+D_1)+D_1x_0+E_1y_0+F_1=0,$$

$$(8)\quad x(A_2x_1+B_2y_1+C_2)+y(B_2x_1+C_2y_1+D_2)+D_2x_1+E_2y_1+F_3=0.$$

Identificând (7) cu (3), apoi (8) cu (3) reese:

$$(9)\qquad \frac{A_1x_0+B_1y_0+C_1}{\lambda}=\frac{B_1x_0+C_1y_0+D_1}{-1}=\frac{D_1x_0+E_1y_0+F_1}{-\lambda a+b}$$

$$(10)\qquad \frac{A_2x_1+B_2y_1+C_2}{\lambda}=\frac{B_2x_1+C_2y_1+D_2}{-1}=\frac{D_2x_1+E_2y_1+F_2}{-\lambda a+b}.$$

Din (9) şi (10) deducem respectiv:

$$(9')\qquad \begin{cases}(A_1+B_1\lambda)x_0+(B_1+C_1\lambda)y_0+(C_1+D_1\lambda)=0\\ [B_1(\lambda a-b)-D_1]x_0+[C_1(\lambda a-b)-E_1]y_0+\\ D_1(\lambda a-b)-F_1=0.\end{cases}$$

$$(10')\qquad \begin{cases}(A_2+B_2\lambda)x_1+(C_2+C_2\lambda)y_1+C_2+D_2\lambda=0\\ [B_2(\lambda a-b)-D_2]x_1+[C_2(\lambda a-b)-E_2]y_1+\\ D_2(\lambda a-b)-F_2=0\end{cases}$$

Eliminând pe x_0, y_0 între ecuaţiile (5) şi (9'), apoi pe x_1, y_1 între ecuaţiile (6) şi (10') avem:

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} A_1+B_1\lambda & B_1+C_1\lambda & C_1+D_1\lambda\\ B_1(\lambda a-b)-D_1 & C_1(a\lambda-b)-E_1 & D_1(a\lambda-b)-F_1\\ u & v & w\end{vmatrix}=0;$$

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} A_2+B_2\lambda & B_2+C_2\lambda & C_2+D_2\lambda\\ B_2(\lambda a-b)-D_2 & C_2(a\lambda-b)-E_2 & D_2(\lambda a-b)-F_2\\ u & v & w\end{vmatrix}=0.$$

Dacă în aceşti determinanţi, scădem din elementele liniei II, elementele liniei I înmulţite cu a, apoi atunci obţinem mai simplu:

$$(11')\qquad \begin{vmatrix} A_1+B_1\lambda & B_1+C_1\lambda & C_1+D_1\lambda\\ aA_1+bB_2+D_1 & aB_1+bC_1+E_1 & aC_1+bD_1+F_1\\ u & v & w\end{vmatrix}=0;$$

$$(12')\quad \begin{vmatrix} A_2+B_2\lambda & B_2+C_2\lambda & C_2+D_2\lambda \\ aA_1+bB_2+D_2 & aB_2+bC_2+E_2 & aC_2+bD_2+F_2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţiunile (11′) şi (12′) se pot pune sub formele următoare mai simple:

$$(13)\quad \begin{cases} a_1u+b_1v+c_1w+\lambda(a_2u+b_2v+c_2w)=0, \\ a_3u+b_3v+c_3w+\lambda(a_4u+b_4v+c_4w)=0. \end{cases}$$

Eliminând pe λ deducem:

$$(14)\quad (a_1u+b_1v+c_1w)(a_4u+b_4v+c_4w)- (a_2u+b_2v+c_2w)(a_3u+b_3v+c_3w)=0.$$

Prin urmare înfăşurătoarea este o conică, a cărei ecuaţie tangenţială este (14). Din ecuaţia (14), se citeşte cum că, conica înfăşurătoare este tangentă la patru drepte fixe formând un patrulater cu vârfurile:

$$A\left(\frac{a_1}{c_1},\frac{b_1}{c_1}\right);B\left(\frac{a_2}{c_2},\frac{b_2}{c_2}\right);C\left(\frac{a_3}{c_3},\frac{b_3}{c_3}\right)\text{şi } D\left(\frac{a_4}{c_4},\frac{b_4}{c_4}\right),$$

Pentru a avea o vedere mai clară, să presupunem că punctul fix M, e luat chiar ca origina axelor perpendiculare; atunci $a=0$, $b=0$ şi ecuaţiile (11′) şi (12′) se scriu sub formele:

$$(15)\quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \\ u & v & w \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0;$$

$$(16)\quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ D_2 & E_2 & F_2 \\ u & c & w \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ D_2 & E_2 & F_2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţiunile (15) şi (16) sunt analoage cu ecuaţiunile (13) de mai sus. Cei patru determinanţi dela (15) şi (16) sunt — egalaţi cu zero — ecuatangenţiale *a patru* puncte. Poziţia acestor patru puncte se deduce foarte uşor, şi problema e prin-urmare stabilită.

NOTE MATEMATICE

11. — *Asupra unei relaţii.*

In R. M. T. No, 1 şi 2 an. XI. d-l *Col. Gh. Buicliu* şi d-l *Alexandru Niculescu* dau o demonstraţie elementară a unei relaţii *Van Aubel.* In cele ce urmează îmi propun să dau o verificare mai simplă a acestei relaţii. Fie A B C un triunghiu dreptunghiu şi M un punct oarecare pe ipotenuza B C. Proectând ortogonal punctul M pe cele două catete obţinem punctele N şi P respectiv pe A B şi A C. Triunghiul M N B fiind asemenea cu A B C avem:

$$\frac{MN}{AC}=\frac{MB}{BC}$$

sau:

$$(1)\qquad MN.BC=AC.MB$$

Tot astfel avem şi din triunghiurile asemenea M P C şi A B C:

$$\frac{MP}{AB}=\frac{MC}{BC}$$

sau:

$$(2)\qquad MP.BC=MC.AB$$

Ridicând relaţiile (1) şi (2) la patrat şi adunându-le obţinem relaţia:

$$(3)\quad \overline{BC}^2(\overline{MN}^2+\overline{MP}^2)=\overline{AB}^2.\overline{MC}^2+\overline{AC}^2.\overline{MB}^2$$

Dar din triunghiul dreptunghiu A N M avem:

$$\overline{MN}^2+\overline{MP}^2=\overline{AM}^2$$

şi deci (3) devine:

$$(4)\qquad \overline{AM}^2.\overline{BC}^2=\overline{AB}^2.\overline{MC}^2+\overline{AC}^2.\overline{MB}^2,$$

care este tocmai relaţia cerută.

ST. MUSTA

2. — *Asupra teoremii V. Aubel.*

Această teoremă a fost rezolvată de d-l *C. Coşniţă* în R. M. T, vol. X pag. 122 prin inversiune, iar în R. M. T. vol. XI pag. 6 de d-l Colonel *Gh. Buicliu* pe cale de geometrie elementară.

In cele ce urmează vom arăta că această teoremă se poate deduce uşor şi din teorema lui *Stewart.* In adevăr, dacă M este un punct arbitrar pe ipotenuza B C a trîunghiului A B C, teorema lui *Stewart* dă:

$$\overline{AB}^2\overline{MC}+\overline{AC}^2\overline{MB}-\overline{AM}^2\overline{BC}=\overline{BC}.\overline{BM}.\overline{MC}$$

Inmulţind ambii membrii ai egalităţii cu $\overline{BC}.\overline{BM}.\overline{MC}$ avem:

$$\overline{AB}^2\,\overline{MC}^2\,\overline{MB}\,\overline{BC}+\overline{AC}^2\,\overline{MB}^2\,\overline{MC}\,\overline{BC}-$$
$$\overline{AM}^2\,\overline{BC}^2\,\overline{MB}\cdot\overline{MC}=\overline{BC}^2\,\overline{BM}^2\,\overline{MC}^2=$$
$$(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)\,\overline{BM}^2\,\overline{MC}^2=\overline{AB}^2\,\overline{BM}^2\,\overline{MC}^2+$$
$$\overline{AB}^2\,\overline{BM}^2\,\overline{MC}^2$$

Rezultă:

$$\overline{AB}^2\,\overline{MC}^2\,\overline{MB}\,(\overline{BC}-\overline{BM})+$$
$$\overline{AC}^2\,\overline{MB}^2\,\overline{MC}\,(\overline{BC}-\overline{MC})=\overline{AM}^2\,\overline{BC}^2\,\overline{MB}\,\overline{MC}$$

dar:

$$\overline{BC}-\overline{BM}=\overline{MC}\quad\text{şi}\quad\overline{BC}-\overline{MC}=\overline{MB}$$

deci:

$$\overline{AB}^2\,\overline{MC}^2\,\overline{MB}\,(\overline{BC}-\overline{BM})+$$
$$\overline{AC}^2\,\overline{MB}^2\,\overline{MC}\,(\overline{BC}-\overline{MC})=$$
$$\overline{AB}^2\,\overline{MC}^2\,\overline{MB}\,\overline{MC}+\overline{AC}^2\,\overline{MB}^2\,\overline{MC}\,\overline{MB}=$$
$$\overline{AM}^2\,\overline{BC}^3\,\overline{MB}\,\overline{MC}$$

Simplificând această relaţie cu $\overline{MB}\,\overline{MC}$ avem atunci tocmai relaţia lui *Van Aubel:*

$$\overline{AB}^2\,\overline{MC}^2+\overline{AC}^2\,\overline{AM}^2\,\overline{BC}^2$$

PURDILA A.

---

13. — *Generalizarea problemei 838 din „R. M. T.“*

Voesc să demonstrez, în cele ce urmează, următoarea inegalitate:

$$\frac{\sqrt{(a_1+a_1')^2+(a_2+a_2')^2+\ldots+(a_n+a_n')^2}+\sqrt{(a_1-a_2'^2)^2+(a_1-a_2'^2)^2+\ldots+(a_n-a_n')^2}}{2}<$$
$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{a_1'^2+a_2'^2+\ldots+a_n'^2}$$

cantităţile cari figurează în inegalitate, fiind reale.

Voiu demonstra întâi inegalitatea:

$$(1)\qquad \sqrt{(a_1+a_1')^2+(a_2+a_2')^2+\ldots+(a_n+a_n')^2}<$$
$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{a_1'^2+a_2'^2+\ldots+a_n'^2}$$

Având a face cu radicali *pozitivi*, putem ridica inegalitatea la patrat patrat, fără ca ea să-şi schimbe sensul.

Făcând această operaţie şi reducând termenii asemenea, ajungem la următoarea inegalitate:

$$(2)\qquad a_1a_1'+a_2a_2'+\ldots+a_na_n'<$$
$$\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(a_1'^2+a_2'^2+\ldots+a_n'^2)}$$

Dacă vom dovedi că această inegalitate este adevărată, atunci va rezulta că şi inegalitatea (1) dela care am plecat, este adevărată.

Să justificăm inegalitatea (2). Considerăm identitatea lui *Lagrange:*

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(a_1'^2+a_2'^2+\ldots+a_n'^2)-$$
$$(a_1a_1'+a_2a_2'+\ldots+a_na_{n-1}')^2=$$
$$(a_1a_2'-a_2a_1')^2+\ldots+(a_1a_n'-a_na_1')^2+$$
$$\ldots+(a_{a-1}a_n'-a_na_{n-1}')^2,$$

cantităţile cari figurează aici fiind toate reale.

In aceste condiţii, rezultă imediat că avem:

$$(a_1a_1'+a_2a_2'+\ldots+a_na_n')^2\leq(a_1^2+a_2^2+$$
$$\ldots+a_n^2)(a_1'^2+a_2'^2+\ldots+a_n'^2),$$

egalitatea având loc când:

$$\frac{a_1}{a_1'}=\frac{a_2}{a_2'}=\ldots=\frac{a_n}{a_n'}$$

Extrăgând rădăcina patrată din ambii membri şi luând radicalii cu semnul plus obţinem inegalitatea (2).

Prin această operaţie şi cu precauţia pe care am avut-o de a considera radicalii cu semnul plus, inegalitatea obţinută *nu şi-a schimbat semnul.*

In adevăr, cantităţile din inegalitate fiind reale atunci oricare ar fi semnul lor, membrul al doilea este pozitiv şi după extragerea rădăcinei patrate, deci este mai mare decât cantitatea $a_1a_1'+a_2a_2'+\ldots+a_na_n'$, oricare ar fi semnul acesteia.

Inegalitatea (2) este astfel justificată şi deci (1) este de asemenea justificată. Această inegalitate fiind valabilă oricare ar fi semnul cantităţilor din ea, vom putea înlocui pe: $a_1', a_2', \ldots a_n'$ respectiv

prin $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$ şi vom obţine în felul acesta următoarea inegalitate:

$$\sqrt{(a_1 - a'_1)^2 + (a_2 - a'_2)^2 + \ldots + (a_n - a'_n)^2} < \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{a'^2_1 + a'^2_2 + \ldots + a'^2_n},$$

care adunată cu (1) ne dă tocmai inegalitatea ce mi-am propus să demonstrez.

Iată acum o soluţie geometrică a problemei 838 precum şi o generalizare pentru $n = 3$.

In planul a două axe perpendiculare $0x$, $0y$ consider punctele: $A(a_1, a_2)$, $A'(a'_1\ a'_2$ şi simetricile lor în raport cu O; avem, în triunghiurile: O A A', O A B':

$$AA' < OA + OA'; \qquad AB' < OA + OB'.$$

Exprimând analitic aceste inegelităţi avem:

$$\sqrt{(a_1 - a'_1)^2 + (a_2 - a'_2)^2} < \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{a'^2_1 + a'^2_2};$$

$$\sqrt{(a_1 + a'_1)^2 + (a_2 + a'_2)^2} < \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{a'^2_1 + a'^2_2}.$$

Adunând aceste inegalităţi, obţinem inegalitatea din enunţul problemei 838.

Trecem în spaţiu şi considerăm un triedru tridreptunghic de referinţă $0xyz$ şi două puncte: $A(a_1, a_2, a_3)$, $A'(a'_1, a'_2, a'_3)$ precum şi simetricele lor în raport cu O: $B(-a_1, -a_2, -a_3)$, $B'(-a'_1, -a'_2, -a'_3)$, In triunghiurile: O A A', O A B' avem înegalităţile:

$$AA' < OA + OA'; \qquad AB' < OA + OB'$$

Exprimând analitic aceste inegalităţi, avem:

$$\sqrt{(a_1 - a'_1)^2 + (a_2 - a'_2)^2 + (a_3 - a'_3)^2} < \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3}$$

$$\sqrt{(a_1 + a'_1)^2 + (a_2 + a'_2)^2 + (a_3 + a'_3)^2} < \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{a_1^2 + a'^2_2 + a'^2_3}$$

Adunând aceste inegalităţi avem:

$$\frac{\sqrt{(a_1 + a'_1)^2 + (a_2 + a'_2)^2 + (a_3 + a'_3)^2} + \sqrt{(a_1 - a'_1)^2 + (a_2 - a'_2)^2 + (a_3 - a'_3)^2}}{2} < \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3}$$

Şi acum în mod natural suntem conduşi către o generalizare. Considerând aceleaşi puncte într'un spaţiu n dimensional şi scriind aceleaşi relaţii de mărime vom obţine inegalităţile generalizate.

CEZAR COSNITA

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Matematică, anul XXXVI, No. 10, Iunie, 1931. Généralisation de thèorêmes de *Neuberg* et de *Gob*, de *V. Thébault*. Dimensionarea unui Aerodrom, de *Căpitan Gh. Niculescu*.

2. *Căpitan Gh. Niculescu*. O variabilă importantă în combustiunea motoarelor de aviaţie. (Extras din G. M.)

3. *Căpitan Fh. Niculescu* Dimensionarea unui Aerodrom. (Extras din G. M.)

PROBLEME REZOLVATE

928. — *Se cer patratele perfecte:*

$$a\,b\,c\,d\,d\,e = N^2 \quad \text{şi} \quad a\,b\,f\,d\,d\,g = (N+1)^2,$$

în care e, f, g sunt patrate perfecte, iar c este cub perfect.

VLADIMIR I. CRIVATZ

Efectuând diferenţa celor două patrate, avem:

$$a\,b\,f\,d\,d\,g - a\,b\,c\,d\,d\,e = (N+1)^2 - N^2$$

sau:

$$(1) \qquad 1000(f - c) + g - e = 2N + 1$$

Cum:

$$e, f, g = 0,\ 1,\ 4,\ 9$$

deducem:

$$e = 0, \qquad g = 1$$
$$e = 1, \qquad g = 0,\ 4$$
$$e = 4, \qquad e = 1,\ 9$$
$$e = 9, \qquad g = 4$$

Substituind aceste valori în (1), obţinem:

$$(2) \quad 500(f - c) = N \qquad 500(f - c) = N \pm 1,$$
$$500(f - c) = N \pm 2, \qquad 500(f - c) = N + 3.$$

Ţinând seamă că N^2 şi $(N+1)^2$ au şase cifre, avem:

$$316 \leq N < 999$$

şi având în vedere relaţiile (2), rezultă:

(3) $\quad f - c = 1 \quad$ sau $\quad f - c = 2.$

Privind relaţiile (2) şi (3), deducem:

$N = 500$; 499, 501; 498, 502, 998; 497, 997,

care dau pentru N^2 şi $(N+1)^2$ respectiv valorile:

250000, 251001; 249001, 250000;

251001, 252004; 248004, 249001;

252004, 253009; 996004, 998001;

247009, 240004; 994009, 996004.

Dintre aceste grupe, numai:

$$\begin{cases} N^2 = 250000 = 500^2 = a\,b\,c\,d\,d\,e \\ (N+1)^2 = 251001 = 501^2 = a\,b\,f\,d\,d\,g \end{cases}$$

şi:

$$\begin{cases} N^2 = 248004 = 498^2 = a\,b\,c\,d\,d\,e \\ (N+1)^2 = 249001 = 499^2 = a\,b\,f\,d\,d\,e, \end{cases}$$

satisfac şi condiţia de a avea simultan c cub perfect şi f patrat perfect şi ne dau astfel soluţiile problemei.

Soluţii date de d-nii: *Boerescu V. George* (Lic., Oltenita), *Bujoreanu Vicenţiu* (bacalaureat), *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Derenbaum M.*, *Filipovici I.*, *Georgescu Petre* (Şc. Polit., Timişoara), *Ionescu P. Haralamb* (bacalaureat, Oltenita), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Mecu Ilie* (Lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Millea G. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Parepeanu C. I.*, *Păsculescu Vasile* (Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Purdilă Anton* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic.. Constanţa), *Sâmbotin Gh.*, *Stoicescu Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Savin C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie) şt *Weissmann Mauriciu* (Lic. Constanţa).

Observare: D-nii *M. E.* şi *S. G.* au dat exact acéiaşi redactare problemei; astfel de soluţii nu vom mai considera.

943. — *Un patrat de cinci cifre are prima cifră 9. Să se găsească acest patrat perfect ştiind că dacă mutăm pe 9 la sfârşitul numărului, obţinem tot un patrat perfect.*

A PURDILA

Patratul căutat este de forma $9\,a\,b\,c\,d$. Conform enunţului $9\,a\,b\,c\,d$ şi $a\,b\,c\,d\,9$ sunt patrate perfecte.

d fiind ultima cifră a unui patrat perfect, poate fi:

(1) $\quad d = 0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9$

Terminaţiile de două cifre ale unui patrat perfect fiind:

00, 25, 01, 09, 21, 29, 41, 49, 61, 69, 81, 89,

04, 16, 24, 36, 44, 56, 64, 76, 84, 96 şi $d\,9$

fiind terminaţie de patrat perfect, rezultă ţinând seamă de (1), că nu putem avea de cât:

(2) $\quad d = 0,\ 4,\ 6$

Pe de altă parte observăm că:

$$300^2 \leq 9\,a\,b\,c\,d \leq 316^2$$

şi d fiind 0, 4, 6 rezultă că $9\,a\,b\,c\,d$ poate fi patratul numerilor:

300, 302, 304, 306, 308, 310, 312, 314, 316

care sunt:

90000, 91204, 92416, 93636, 94864, 96100, 97344, 98596, 99856

Dintre aceste numere, numai 90000 şi 96100 satisfac şi condiţia că mutând pe 9 la sfârşit, rămân tot patrate perfecte, fiindcă: $0009 = 3^2$, $61009 = 247^2$. Numerile:

$$90000 = 300^2,\ 96100 = 310^2$$

constituesc singurile soluţii.

Soluţii date de d-nii: *Bujoreanu Vicenţiu* (Şc. Milit. de Geniu), *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Crivăţ I. Vladimir* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.*, *Dini Ioan* (Lic. Milit., Craiova), *Georgescu Petre* (Şc. Polit., Timişoara), *Grinberg N. M.* (Lic., Thighina), *Marineanu Traian* (Studert, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (student Bucureşti), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Millea G. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Păsculescu Vasile* (Craiova), *Pisai I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Pupezescu Gh. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Russu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Stoicescu Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Sullă A. Paul* (Lic. Milit,, Chişinău) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanţa).

946. — Fie A B C D *un patrulater oarecare, iar* E *punctul de intersehţie al diagonalelor. Să se arată că avem:*

$$\frac{\overline{ED}\,(\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2) + \overline{BE}\,(\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2)}{\overline{AE} - \overline{CE}} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

EMILIAN MEREUTA

Construim patrulaterul A B C D şi fie E intersecţia diagonalelor. Aplicăm teorema lui *Stewart* în fiecare din triunghiurile B A D şi B C D, avem:

$$(1)\qquad \overline{AB}^2\cdot\overline{ED}+\overline{AD}^2\cdot\overline{BE}-\overline{AE}^2\cdot\overline{BD}=\overline{BD}\cdot\overline{ED}\cdot\overline{BE}$$

$$(2)\qquad \overline{BC}^2\cdot\overline{ED}+\overline{CD}^2\cdot\overline{BE}-\overline{CE}^2\cdot\overline{BD}=\overline{BD}\cdot\overline{ED}\cdot\overline{BE}$$

Scăzând relaţia (2) din (1), obţinem:

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{ED}+\overline{AD}^2\cdot\overline{BE}-\overline{AE}^2\cdot\overline{BD}-\overline{BC}^2\cdot\overline{ED}-\overline{CD}^2\cdot\overline{BE}+\overline{CE}^2\cdot\overline{BD}=0$$

Mai putem scri:

$$\overline{ED}(\overline{AB}^2-\overline{BC}^2)+\overline{BE}(\overline{AD}^2-\overline{CD}^2)=\overline{BD}(\overline{AE}^2-\overline{CE}^2)$$

$$\therefore\quad \overline{ED}(\overline{AB}^2-\overline{BC}^2)+\overline{BE}(\overline{AD}^2-\overline{CD}^2)=\overline{BD}(\overline{AE}-\overline{EC})(\overline{AE}+\overline{EC})$$

Impărţind această egalitate prin $\overline{AE}-\overline{CE}$ şi apoi observând că, $\overline{AE}+\overline{CE}=\overline{AC}$, găsim:

$$\frac{\overline{DE}(\overline{AB}^2-\overline{BC}^2)+\overline{BE}(\overline{AD}^2-\overline{CD}^2)}{\overline{AE}-\overline{EC}}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

Avem astfel relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii *Boerescu P. George* (Lic., Olteniţa), *Crivăţ I. Vladimir* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.*, *Mihăileanu N.* (Lic. Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic., Olteniţa), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Pisai I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Gh.* (Lic., Olteniţa), *Pupezescu Gh. Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Purdilă Anton* (Lic., Braşov) şi *Vonica C, Ion* (Şc. Milit., Timişoara).

950. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{1}{p}\sum\cot A\,.\,\cot B\,.\cot\frac{A}{2}\,.\,r_a+p^2 s\prod\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{R}{2\,p\,s}\sum a\sin A\,.\,h_a+\frac{16R^2r}{p^2}\prod r_a\cos^2\frac{A}{2},$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.[1])

TRAIAN MARINEANU

Să însemnăm pentru simplicicitate cu E_1, primul membru al identităţii şi E_2 membrul al 2-lea.

[1]). Enunţ rectificat.

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$r_a=\frac{s}{p-a},\quad \cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r},\quad s=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad \sum\cot A\cot B=1,$$

putem scri succesiv:

$$(1)\qquad E_1=\frac{1}{p}\sum\cot A\,.\cot\,.\,B\,.\,\frac{s}{r}+p^2 s\frac{r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\sum\cot A\,.\cot B+\frac{p^3r^3s}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=1+\frac{s^4}{s^2}=1+s^2$$

Să transformăm acum şi membrul al 2 lea al identităţi date. Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$R=\frac{abc}{4s},\quad a\,h_a=2s,\quad r_a=\frac{s}{p-a}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-b)}{bc}\qquad \sum\sin A=\frac{p}{R}$$

putem scri succesiv:

$$(2)\qquad E_2=\frac{R}{2ps}\sum\sin A\,.\,2s+\frac{16R^2r}{p^2}\times\frac{s^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}\cdot\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}=\frac{R}{p}\sum\sin A+\frac{16R^2rs^3p^3}{p^2a^2b^2c^2}=1+\frac{16\dfrac{a^2b^2c^2}{16s^2}\cdot s^4p^2}{p^2a^2b^2c^2}=1+s^2$$

Comparând relaţiile (1) şi (2), deducem că:

$$E_1=E_2,$$

adică identitatea dată este stabilită.

Soluţii date de dnii: *Ionescu P. Haralamb* (student), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Olteniţa) şi *Rusu D. Ctin* (Lic., Constanţa).

957. — *Se dau relaţiile:*

$$u=x+2y+z$$

$$v=2x+y+3z$$

$$w=3(x^2-y^2)+2(4z^2+5xz+yz)$$

Să se dovedească că putem elimina pe x, y, z între aceste relaţii şi să se găsească relaţia între u, v, w obţinută prin eliminarea lui x, y, z.

V. ALACI

Pentru a evidenţia că putem elimina pe x, y, z între cele trei relaţii date, trebuie să dovedim că determinantul funcţional al celor trei funcţiuni u, v, w de variabilele x, y, z, adică determinantul format cu derivatele parţiale în raport cu x, y, z a celor trei funcţiuni u, v, w, este identic nul.

In adevăr, acest determinant funcţional D, se poate scri:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6x+10z & -6y+2z & 16z+10x+2y \end{vmatrix} =$$

$$16z+10x+2y-12y+4z+36x+60z-$$

$$6x-10z+18y-6z-64z-40x-8y=0$$

Determinantul funcţional fiind nul, între u, v, w este o relaţie.

Rezolvând primele două relaţii în raport cu x, y, obţinem:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2v-u-5z}{3} \\ y = \dfrac{2u-v+z}{3} \end{cases}$$

Aceste valori înlocuite în relaţia 3-a ne dau:

$$w = \frac{(2v-u-5z)^2-(2u-v+z)^2}{3} +$$

$$8z^2+10z\frac{2v-u-5z}{3}+2z\frac{2u-v+z}{3}$$

Mai putem scri:

$$3w=(v+u-4z)(3v-3u-6z)+24z^2+$$

$$20vz-10uz-50z^2+4uz-2vz+2z^2=$$

$$3v^2+3uv-12vz-3uv-3u^2+12uz-$$

$$6vz-6uz+24z^2+24z^2+20vz-10uz-$$

$$50z^2+4uz-2vz+2z^2$$

Simplificând, obţinem:

$$(1) \qquad w=v^2-u^2$$

Aceasta este relaţia cerută.

Observare. Putem uşor stabili relaţia (1), calculând expresia v^2-u^2, avem astfel:

$$v^2-u^2=(2x+y+3z)^2-(x+2y+z)^2=$$

$$(3x+3y+4z)(x-y+2z)=3x^2+3xy+$$

$$4xz-3xy-3y^2-4yz+6xz+6yz+8z^2=$$

$$3(x^2-y^2)+2(4z^2+5xz+yz,$$

sau:

$$v^2-u^2=w$$

Evident aceasta nu constitue o metodă pentru a trata chestiunea.

Soluţiuni bune, date de d-nii: *Bimbulov Nicolae* (Şc, Polit., Timişoara), *Boca V. Vasile* (Şc. Polit., Timişoara). *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Iotta D. Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Jeba C. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *† Marcu Aureliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Marşieu Iaodor* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Ţiucra Mircea* (Şc, Polit. Timişoara).

Au verificat numai relaţia (1), procedând ca în observarea de mai sus, d-nii: *Boerescu P. George* (Lic., Oltenita), *Cincilian Agop* (Balcic), *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Thighina), *Ioneseu P. Haralamb* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.*, *Păuoiu Em.* (Lic. Carol, Craiova), *Păsculescu V.* (bacalaurcat, Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa) şi *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

958. — *Să se demonstreze că dacă într'un triunghiu* A B C, *are loc una din relaţiile clasice:*

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$$

$$\overline{AC}^2=\overline{BC}\cdot\overline{DC}$$

$$\overline{AD}^2=\overline{DC}\cdot\overline{BD}$$

D *fiind piciorul înălţimei coborâte din* A *pe* B C, *triunghiul este dreptunghic.*

A. HOLLINGER

Fie A D înălţimea din A.

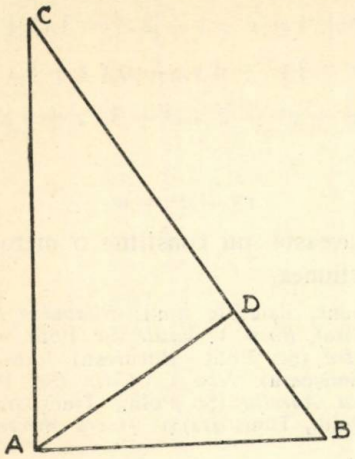
Prima relaţia se poate scri:

$$(1) \qquad \frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}$$

Observăm că triunghiurile A B D şi A B C sunt asemenea, având unghiul B comun şi cuprins între laturi proporţionale, ceia ce rezultă din relaţia (1).

Din asemănarea acestor triunghiuri A B D şi

A B C rezultă că la laturi omoloage se opun unghiuri egale, deci:



$$\widehat{ADB} = \widehat{BAC}$$

şi cum $\widehat{ADB}$ este prin construcţie drept, rezultă că $\widehat{BAC}$ este drept, adică triunghiul A B C este dreptunghic.

Analog conchidem că triunghiurile A C D şi A B C sunt asemenea având $\widehat{C}$ comun şi laturile ce cuprind acest unghiu proporţionale, ceia ce rezultă din din a 2-a relaţie dată, care se poate scri:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$$

deci urmează:

$$\widehat{ADC} = \widehat{DAC} = 90^0,$$

adică ABC este un triunghiu dreptunghiu.

Trecem acum la relaţia 3-a din enunţ care se poate scri:

$$(2) \qquad \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD}$$

Triunghiurile dreptunghice A D B şi A D C având unghiurile din D egale ca drepte şi laturile acestor unghiuri proporţionale, ceia ce reiasă din (2), rezultă că sunt asemenea. Din asemănarea acestor triunghiuri A D B şi A D C rezultă că unghiurile opuse la laturi omoloage sunt egale, deci:

$$(3) \qquad \widehat{B} = \widehat{DAC}$$

De altă parte din triunghiul dreptunghic A D B, rezultă:

$$\widehat{DAB} + \widehat{B} = 90^0$$

şi ţinând seamă de (3), putem scri:

$$\widehat{DAB} + \widehat{DAC} = 90^0,$$

adică:

$$\widehat{BAC} = 90^0,$$

şi deci triunghiul A B C este dreptunghic.

Soluţii date de d-nii: *Beral H.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Boerescu P. George* (Lic., Olteniţa), *Chivu S. I.* (Lic. Milit., Craiova), *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Dumitrescu N. Romeo* (Lic., Roman), *Grinberg N. Meer* (Lic., Tighina), *Iliescu I. Teodor* (Caracal), *Lascu Ioau* (Lic. Milit., Craiova), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Mereuţă C.* (Lic. Piatra-Neamţ), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti) *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Mircea A. Ion* (Giurgiu), *Motoc D. Mircea* (Lic., Olteniţa), *Nagler Meyer* (Lic. Naţional, Iaşi), *Negrea Mircea-Leonte* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Pascaru S. I.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Cralova), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Olteniţa), *Popescu C. Ştefan* (Lic. Milit., Craiova), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. D-tin* (Lic., Constanţa), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

960. — *Să se găsească un număr de patru cifre a b c d, ştiind că:*

$$a\,b\,c\,d = (a\,b)^3 + (b\,c)^2 + c\,d$$

ION GH POPA

Relaţia din enunţ se mai poate scri şi astfel:

$$1000\,a + 100\,b + 10\,c + d = (10\,a + b)^3 + (10\,b + c)^2 + 10\,c + d$$

Simplificând şi făcând desvoltările, avem:

$$(1) \quad 1000\,a + 100\,b = 1000\,a^3 + 3000\,a^2\,b + 30\,a\,b^2 + b^3 + 100\,b^2 + 20\,b\,c + c^2$$

Numărul de mii din ambii membrii trebuind să fi acelaşi, rezultă imediat:

$$a = 1$$

Atunci relaţia (1) devine, dacă o simplificăm:

$$(2) \quad 100\,b = 300\,b + 30\,b^2 + b^3 + 100\,b^2 + 2\,bc + c^2$$

Numărul de sute din ambii membrii fiind acelaşi, rezultă imediat:

$$b = 0,$$

şi atunci relaţia (2), ve dă uşor:

$$c = 0.$$

Astfel numărul căutat este de forma:

$$100\,d$$

unde d, poate fi: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Avem deci următoarele 10 soluţii:

1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006,

1007, 1008, 1009.

Soluţii date de dnii: *Băleanu Nolică* (Lic. Milit., Craiova), *Costăchescu N. Teodor* (Lic., Brăila), *Derenbaum* (bacalaureat, Tighina), *Dini Ion* (Lic. Milit, Craiova), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanţa).

962. — *Să se determine a şi b astfel ca limita pentru* $x = \infty$ *a expresiei:*

$$\sqrt[5]{a x^5 + (b+1) x^4 + 1} - \sqrt[5]{b x^5 + x^4 - 1},$$

să fie egală cu 2.

V. ALACI

Expresia dată pentru $x = \infty$ ia forma nedeterminată $\infty - \infty$. Penrru a ridica aceasta nedeterminare, folosim identitatea:

$$A^5 - B^5 = (A - B)(A^4 - A^3 B + A^2 B^2 - A B^3 + B^4)$$

care se poate scri:

$$(1)\quad A - B = \frac{A^5 - B^6}{A^4 - A^3 B + A^2 B^2 - A B^3 + B^4}$$

Dacă în această identitate luăm:

$$A = \sqrt[5]{a x^5 + (b+1) x^4 + 1}$$

$$B = \sqrt[5]{b x^5 + x^4 - 1}$$

expresia (1) devine:

$$(2)\quad \sqrt[5]{a x^5 + (b+1) x^4 + 1} - \sqrt[5]{b x^5 + x^4 - 1} = \frac{a x^5 + (b+1) x^4 + 1 - b x^5 - x^4 + 1}{\sum_{i=0}^{4} \sqrt{[a x^5 + (b+1) x^4 + 1]^{4-i} (b x^5 + x^4 - 1)^i}}$$

Pentru ca fracţia din membrul al 2-lea să aibă o limită finită şi diferită de zero pentru $x = \infty$, trebuie ca numărătorul şi numitorul să fie de acelaşi grad, se impune deci condiţia:

$$a = b,$$

în care caz relaţia (2) se poate scri, impărţind ambii termeni ai fracţiei din membrul al 2-lea prin x^4:

$$\sqrt[5]{a x^5 + (b+1) x^4 - 1} - \sqrt[5]{b x^5 + x^4 - 1} = \frac{b + \frac{2}{x^4}}{\sum_{i=0}^{4} \sqrt[5]{\left[a + \frac{b+1}{x} + \frac{1}{x^4}\right]^{4-i} \left(b + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}\right)^i}}$$

Trecând la limită pentru $x = \infty$, obţinem:

$$\lim_{x=\infty} \left(\sqrt[5]{a x^5 + (b+1) x^4 - 1} - \sqrt[5]{b x^5 + x^4 - 1}\right) = \frac{b}{\sum_{i=0}^{4} \sqrt[5]{(a)^{4-i} b^i}}$$

sau ţinând seamă că $a = b$, avem:

$$\lim_{x=\infty} \left(\sqrt[5]{a x^5 + (b+1) x^4 + 1} - \sqrt[5]{b x^5 + x^4 - 1}\right) = \frac{b}{5\sqrt[5]{b^4}}$$

Cum prin ipoteză se cere ca limita expresiei date să fie 2, rezultă că trebuie să avem:

$$\frac{b}{5\sqrt[5]{b^4}} = 2$$

$$\therefore \qquad \sqrt[5]{b} = 10,$$

deci:

$$b = 10^5$$

Aşa dar:

$$a = b = 10^5$$

Soluţii date de d-nii: *Iotta D. Mihail* (Şc. Polit. Timişoara), *Ionescu P. Haralamb* (student) *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti).

973. — *Se cere cubul perfect de forma* $a\,b\,c\,b\,c\,b\,a$ *în care numărul format din cifrele întâia, a doua, a patra şi a şasea e un cub, iar suma cifrelor cubului cerut e tot un cub.*

EMILIAN MEREUTA

Conform enunţului, numărul $a\,b\,b\,b$ este un cub perfect, atunci rezultă:

$$10^3 < a\,b\,b\,b < 22^3$$

Singurele numere de două cifre mai mici ca 22 care ridicate la cub să ne dea numere terminate cu trei cifre egale sunt:

19 şi 20

Cubul cerut rezultă că este de forma:

$$10\,c\,0\,c\,01\,, \qquad 80\,c\,0\,c\,08$$

Dacă ţinem încă seamă de condiţia că suma cifrelor cubului cerut este un cub, deducem că cifra c trebuie să fie astfel ca:

(1) $2\,(1+c)$, şi (2) $2\,(4+c)$

să fie cuburi perfecte.

Expresia (1) este un cub perfect, numai dacă c este 3, iar (2) este cub perfect numai dacă $c = 0$.

Cubul cerut ar putea fi astfel:

1030301 şi 8000008

Dintre aceste numere numai 1030301 este cub perfect,

$$1030301 = 101^3$$

şi este astfel singura soluţie.

Soluţii date de dnii: *Beral Haim* (Lic. Naţional, Iaşi), *Boerescu P. George* (Lic., Oltenita), *Constantinescu Mircea* (Bucureşti), *Costăchescn C. C-tin* (Lic. Milit., Iaşi), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi) *Grinberg N. Meer* (Lic., Tighina), *Ioaniu C. Gheorghe* (Lic. Carol Craiova), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Motoc D.* (Lic., Oltenita), *Nagler Mayer* (Lic. Naţional, Iaşi), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R-Vâlcea), *Parepeanu I.* (Lic, Braşov), *Pascaru I*, *Păsculescu V.* (Craiova) *Pănoiu Emanuil* (Lic. Carol, Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Popa N.* (Lic., Constanţa), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Sâmbotin Gh.*, *Şerban A. Teodor* (Lic. Milit., Iaşi), şi *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanţa).

975. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y = 3z \\ x^2 + y^2 = 5z^2 \\ x^3 + y^3 = 80 - z^3 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Ridicăm prima ecuaţie la patrat şi scădem pe a 2-a, apoi ridicăm prima ecuaţie la cub şi scădem pe a 3-a, obţinem astfel:

$$\begin{cases} xy = 2z^2 \\ 3xy\,(x+y) = 28z^3 - 80 \end{cases}$$

Ţinând seamă de prima ecuaţie, putem scri încă:

$$(1) \qquad \begin{cases} xy = 2z^2 \\ xy = \dfrac{28z^3 - 80}{9z} \end{cases}$$

Rezultă de aci:

$$\frac{28z^3 - 80}{9z} = 2z^2$$

$$\therefore \qquad z^3 - 8 = 0,$$

sau:

$$(z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

De aci deducem:

$z = 2$ şi $z = -1 \pm i\sqrt{3}$, $\qquad (i = \sqrt{-1})$

Inlocuind aceste valori ale lui z în prima ecuaţie a sistemului dat şi în prima ecuaţie din (1), obţinem sistemele:

$$(2)\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} x + y = 3(-1 \pm i\sqrt{3}) \\ xy = 2(-1 \pm i\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

x şi y din sistemul (2) sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\therefore \quad t = 3 \pm 1,$$

deci:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

x şi y din sistemul (3) sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$t^2 - 3(-1 \pm i\sqrt{3})t + 2(-1 \pm i\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\therefore t = \frac{3(-1 \pm i \pm \sqrt{3}) \pm \sqrt{9(-1 \pm i\sqrt{3})^2 - 8(-1 + i\sqrt{3})^2}}{2} =$$

$$\frac{3(-1 \pm i\sqrt{3}) \pm (-1 \pm i\sqrt{3})}{2}$$

deci:

$$\begin{cases} x = 2(-1 \pm i\sqrt{3}) \\ y = -1 \pm i\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = -1 \pm i\sqrt{3} \\ y = 2(-1 \pm i\sqrt{3}) \end{cases}$$

Avem dar şase sisteme de soluţii a sistemului, care le înşirăm în tabloul ce urmează:

x	2	4	$-2+2i\sqrt{3}$	$-1+i\sqrt{3}$	$-2-2i\sqrt{3}$	$-1-i\sqrt{3}$
y	4	2	$-1+i\sqrt{3}$	$-2+2i\sqrt{3}$	$-1-i\sqrt{3}$	$-2-2i\sqrt{3}$
z	2	2	$-1+i\sqrt{3}$	$-1+i\sqrt{3}$	$-1-i\sqrt{3}$	$-1-i\sqrt{3}$

Soluţii bune date de d-nii: *Andrei I. Valeriu* (Lic. Milit., Chişinău), *Beral Haim* (Lic. Naţional, Iaşi), *Costăchescu C. C-tin* (Lic. Milit, Iaşi), *Dini Ion* Lic. Milit., Craiova), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova) şi *Şerban Aurel* (Lic. Milit., Chişinău).

Au găsit numai sistemele de soluţii reale, d-nii *Astelean Valeriu* (Lic., Cluj), *Băleanu Nolică* (Lic. Milit., Craiova), *Boerescu P. George* (Lic., Oltenita), *Bojan Andrei* (Lic., Cluj), *Constantinescu Mircea* (Bucureşti), *David Moise* (Lic. Naţional, Iaşi), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Dumitrescu N. Romeo* (Lic., Roman), *Felecan Simeon*, *Gheorghe Valeriu* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Grinberg Meer* (Thigina), *Iohab Nicolae* (Timişoara), *Ioaniu C. Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Ionescu P. Haralamb*, *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Maevschi I.* (student, Cluj), *Manasiu D-triu* (Lic. Milit., Tg. Mureş), † *Marcu Aurelian* (Şc. Polit., Timişoara), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit.. Timişoara), *Mehedinţi D-tru* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student Bucureşti), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Milea G. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Nagler Mayer* (Lic. Naţional, Iaşi), *Negrea A. Mircea Leonte*, (student, Bucureşti), *Neuländer Artur* (Lic., Cluj), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Pascaru L. I.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Pănoiu Em.* (Lic., Carol, Craiova), *Pop Gheorghe* (Lic., Cluj), *Popa Emil*, *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Popa N.* (Lic, Constanţa), *Popescu C. Ştefan* (Lic. Milit., Craiova), *Purdilă Anton* (Lic., Braşov), *Roth Martin* (Lic., Cluj), *Russu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Savovici Florenţiu* (Lic., Tg.-Mureş). *Sâmbotin Gh.*, *Şerban A. Teodor* (Lic. Milit., Iaşi), *Stefănescu Hanibal* (Lic. Mihai-Viteazul) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanţa).

981. — *Să se arate că expresia:*

$$E = 6391^{2n-1} - 4927^{n+1} + 2925^{n-1}$$

se divide prin 77.

EMILIAN MEREUTA

Observăm că:

$$6391 = 77 \times 83,$$

$$4927 = 77 \times 64 - 1$$

$$2925 = 77 \times 38 - 1$$

Insemnând cu E expresia dată, putem astfel scri succesiv:

$$E = (\text{mult. } 77)^{2n-1} - (\text{mult. } 77 - 1)^{n+1} +$$

$$(\text{mult. } 77 - 1)^{n-1} = \text{mult. } 77 - (-1)^{n+1} +$$

$$(-1)^{n-1} = \text{mult. } 77,$$

fiindcă $n-1$ şi $n+1$ sunt ambele numere pare sau impare.

Soluţii date de dnii: *Boerescu P, George* (Lic., Oltenita), *Dini Ion* (Lic. Milit., Craiova), *Ionescu D. Ioan* (Şc. Normală, Bucureşti). *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad) *Marşieu Teodor* (Şc. Polit, Timişoara), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Milea P. Ene*, *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R-Vâlcea), *Parepeanu I.* (Braşov), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Păunescu N.* (Lic., Milit., Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Popa N.* (Lic., Constanţa), *Popescu C. Ştefan*, *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Tăutu Ştefan* (Lic., Roman) şi *Zamfirescu Gh. I.* (Sub.-Lt. Piteşti).

PROBLEME PROPUSE

1013. — Să se găsească un număr de patru cifre astfel că mărit cu 1 este divizibil prin 21, iar mărit cu 6 este divizibil prin 11. Suma cifrelor lui este 14.

V. ALACI

1014. — Un negustor cumpără din târg 100 metri stofă. Spre casă perde o bucată din acea stofă, pe care i-o găseşte un consătean căruia negustorul îi dă pentru adus jumătatea costului bucatei pierdute. Negustorul vinde stofa cu 700 lei metrul şi are un căştig de 0,3 din cât la costat pe el stofa întreagă în târg.

Dacă negustorul ar fi perdut o bucată de stofă de patru ori mai mare ca bucata pe care a perdut'o şi dacă consăteanului i-ar fi dat jumătate din costul bucaţi aduse, vânzând astfel toată stofa tot cu 700 lei metru, n'ar fi fi avut nici un câştig. Se cere cât l'a costat metru şi câţi metri a perdut.

MIRCEA CONSTANTINESCU

1015. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} a\,x + a^2 y^2 = b\,x \\ b^2 x^2 + b\,y = a\,y \end{cases}$$

I. DUMITRIU-DAOA

1016. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x\,y + x\,y^2 + x\,y^2\,z + x\,y\,z = 144 \\ z\,x + z\,x^2 + x^2\,y\,z + x\,y\,z = 120 \\ y\,z + y\,z^2 + x\,y\,z^2 + x\,y\,z = 270 \end{cases}$$

CEZAR COSNITA

1017. — Să se găsească locul geometric al punctelor cari impart în acelaşi raport o coardă de lungime dată.

DILI C. SCHILERU

1018. — Fie D piciorul bisectoarei interioare din A în triunghiul A B C; B_1 proecţia lui B pe A D, A_1 proecţia lui A pe B C şi D_1 proecţia lui D pe A C. Să se demonstreze că punctele A_1, B_1, D_1 sunt colineare.

SUB-LT. A. I. STAN

1019. — Să se stabilească identitatea:

$$1 + \operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4} = 2\,i\,\frac{(1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}}{(1+i)^n - (1-i)^n}, (i = \sqrt{-1})$$

TEODOR MARSIEU

1020. — Ştiind că:

$$a + b + c = \pi,$$

să se stabilească identitatea:

$$\Sigma \sin(a+b+2c) - \Sigma(a+b-2c) =$$

$$16\left[\prod \cos a \cos\frac{a}{2} - \prod \sin a \sin\frac{a}{2}\right] -$$

$$4 \sin a \sin b \sin c$$

JUSTIN N. VALCEANU

1021. — Notaţiile fiind cele obicinuite în'trun triunghiu, să se stabilească identitatea:

$$\frac{r_c(r_a - r_b)}{r_b(r_c + r)} + \frac{r_a(r_b - r_c)}{r_c(r_a + r)} + \frac{r_b(r_c - r_a)}{r_a(r_b + r)} =$$

$$\frac{1}{r}\sum r_a \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}$$

MIRCEA I. GROSSU

1022, — Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:

$$1 + \cos A \cos B \cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8\,R^2},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

CEZAR IVANESCU

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931).

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek,* Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann,* La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale,* Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez,* Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell,* Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff,* Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera,* S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky,* Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler.* Washington (Statele Unite), *J. Shohat,* Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville,* Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault,* Le Mans (Francia), *O. Szász,* Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti,* Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngri. jire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XI. 15 AUGUST 1931 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 TEODOR MARSIEU CATEVA IDENTITATI TRIGONOMETRICE
2. NOTE MATEMATICE: 14, 15,
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 914, 937, 978
5. PROBLEME PROPUSE: 1023-1030
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei.

ANUL XI— No. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1931

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

CATEVA IDENTITATI TRIGONOMETRICE

de TEODOR MARSIEU

In No. 3 din „Revista Matematică din Timişoara“ anul XI. *d-l Profesor V. Alaci* construeşte câteva ecuaţii cu rădăcini trigonometrice printre cari sunt şi următoarele două:

$$(\sin n\alpha_1)x^n - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sin n\alpha = 0$$

$$(\cos n\alpha_1)x^n - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha]x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cos n\alpha = 0$$

Forma simetrică a coeficienţilor acestor ecuaţii mi-a pus în gând ideea de a găsi o metodă pentru a exprima suma lor şi prin aceasta a găsi o clasă de identităţi trigonometrice.

Metoda la care am ajuns este cât se poate de uşoară.

Fie de exemplu sumele:

$$(1)\quad \begin{aligned} S_1 &= \cos n\alpha_1 + C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha \\ S_2 &= \sin n\alpha_1 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \sin n\alpha \end{aligned}$$

Ne propunem să calculăm aceste două sume. Pentru aceasta considerăm expresiunea:

$$E = (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) + (\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

pe care ridicând-o la puterea n, după formula binomului devine:

$$E_1 = (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)^n + C_n^1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)^{n-1} \times (\cos\alpha + i\sin\alpha) + \ldots + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$

Ţinând seamă de formula lui *Moivre*:

$$(M)\qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

şi observând încă, că avem:

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)^{n-k}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = \cos[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + i\sin[(n-k)\alpha_1 + k\alpha]$$

expresia E_1 devine:

$$E_1 = \cos n\alpha_1 + i\sin n\alpha_1 + C_n^1\{\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + i\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]\} + \ldots + C_n^k\{\cos[(n-1)\alpha_1+k\alpha] + i\sin[(n-k)\alpha_1+k\alpha]\} + \ldots + \cos n\alpha + i\sin n\alpha,$$

care se mai poate scrie:

$$(2)\qquad E_1 = S_1 + iS_2$$

unde S_1 şi S_2 sunt date de relaţia (1).

Pe de altă parte expresiunea E o mai putem scri:

$$E = 2\cos\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\right)$$

Ridicând-o acum sub această formă la puterea n şi ţinând seamă de formula (M) avem:

$$(3)\qquad E_1 = 2^n\cos^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\left[\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} + i\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right]$$

Din (2) şi (3) deducem:

$$S_2 + iS_2 = 2^n\cos^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\left[\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} + i\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right]$$

Făcând identificarea părţilor reale şi a coeficienţilor lui i avem:

$$S_1 = 2^n\cos^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}$$

$$S_1 = 2^n\cos^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}$$

Ţinând seamă cine sunt sumele S_1 şi S_2 avem | stabilite identităţile (a).

$$(a)\quad \begin{cases} \cos n\alpha_1 + C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha = \\ \qquad 2^n \cos^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \cos \dfrac{(\alpha_2+\alpha)n}{2} \\ \sin n\alpha_1 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots + \sin n\alpha = \\ \qquad 2^n \cos^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \sin \dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} \end{cases}$$

Exemplu. Pentru $n = 1$ avem identităţile:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha = 2\cos\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2},$$

identităţi bine cunoscute în trigonometria elementară.

Făcând raportul identităţildr (a) găsim identitatea (5):

$$(b)\quad \operatorname{tg}\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} = \frac{\sin n\alpha_4 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}{\cos n\alpha + C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha}$$

Fie acum de calculat sumele:

$$(4)\quad \begin{aligned} S_1' &= \cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \\ &\ldots + (-1)^k C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \\ &\ldots + (-1)^n \cos n\alpha \\ S_2' &= \sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \\ &\ldots + (-1)^k C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \\ &\ldots + (-1)^n \sin n\alpha \end{aligned}$$

In acest caz vom considera expresiunea:

$$E' = (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) - (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Raţionând în mod analog ca şi asupra expresiunei E, expreslunea E′ ridicată la puterea n se poate pune sub forma:

$$(5)\qquad E_1' = S_1' + iS_2'$$

unde $E_1' = (E')^n$ iar sumele S_1' şi S_2' sunt date de (4). Expresiunea E′ se mai poate scrie şi ea:

$$E' = 2i\sin\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\right)$$

Ridicând-o la puterea n şi ţinând seamă de formula (M), avem:

$$(6)\qquad E_1' = 2^n i^n \sin^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2} \times$$

$$\left(\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} + i\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right)$$

Din (5) şi (6) deducem:

$$(7)\qquad S_1' + iS_2' = 2^n i^n \sin^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2} \times$$

$$\left[\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} + i\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right]$$

Din (7) se vede că în cazul când n este cu soţ, identificarea părţii reale şi a coeficienţilor lui i se face astfel:

$$S_1' = 2^n i^n \sin^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}$$

$$S_2' = 2^n i^n \sin^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{(\alpha_1-\alpha)n}{2}$$

iar în cazul când n e fără soţ avem:

$$S_1' = 2^n i^{n+1} \sin^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}$$

$$S_2' = 2^n i^{n-1} \sin^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}$$

Ţinând seamă cine sunt sumele S_1' şi S_2' avem stabilite următoarele identîtăţi:

$$(c)\quad \begin{cases} \cos n\alpha_2 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha = \\ \qquad 2^n i^n \sin\dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \cos\dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} \\ \sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots + \sin n\alpha = \\ \qquad 2^n i^n \sin^n\dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \sin\dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} \end{cases}$$

$$(d)\quad \begin{cases} \cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha = \\ \qquad 2^n i^{n+1} \sin^n\dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \sin\dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} \\ \sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots + \sin n\alpha = \\ \qquad 2^n i^{n-1} \sin^n\dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \cos\dfrac{(\alpha_2+\alpha)n}{2} \end{cases}$$

identitățile (*c*) fiind adevărate numai pentru valorile lui n cu soț, iar (*d*) numai pentru valorile lui n fară soț.

Exemplu. Pentru $n=2$ identitățile (*c*) devin:

$$\cos 2\alpha_1 - 2\cos(\alpha_1+\alpha) + \cos 2\alpha =$$

$$-4\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos(\alpha_1+\alpha)$$

$$\sin 2\alpha_1 - 2\sin(\alpha_1+\alpha) + \sin 2\alpha =$$

$$-4\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin(\alpha_1+\alpha)$$

Aceste se pot dovedi ușor că sunt adevărate. Pentru $n=1$ identitățile (*d*) devin:

$$\cos\alpha_1 - \cos\alpha = -2\sin\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha_2 - \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha}{2}$$

Identitățile aceste sunt cunoscute în trigonometrie și demonstrate în alt mod de cum sunt deduse aci.

Din identitățile (*c*) se deduce identitatea (*e*):

$$(e)\quad \operatorname{tg}\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} = \frac{\sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha}$$

adevărată pentru valorile lui n cu soț.

Pentru n fară soț avem identitatea:

$$(e')\quad \operatorname{tg}\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} = -\frac{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \cos[(n-1)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha}{\sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}$$

dedusă din identitățile (*d*).

Din identitățile (*b*) și (*e*) deducem identitatea:

$$(f)\quad \frac{\sin n\alpha_1 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}{\cos n\alpha_1 + C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha} =$$

$$\frac{\sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1+n\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^k C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1+k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha}$$

adevărată pentru valorile lui n cu soț.

Pentru valorile fară soț ale lui n avem identitatea:

$$(f')\qquad \frac{\sin n\alpha_1 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^k \sin[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}{\cos n\alpha_1 + C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots + \cos n\alpha} =$$

$$= -\frac{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^n C_n^k \cos[(n-1)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots - \cos n\alpha}{\sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^n C_n^k \cos[(n-k)\alpha_1 + k\alpha] + \ldots - \sin n\alpha}$$

Din identitățile (a) și (c) deducem următoarele | patru identități:

$$(g)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} = i^n \dfrac{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \cos n\alpha}{\cos n\alpha_1 + C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \cos n\alpha} \\ \operatorname{tg}^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} = i^n \dfrac{\sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}{\sin n\alpha + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \sin n\alpha} \\ \operatorname{tg}^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{(\alpha_1-\alpha)^n}{2} = i^n \dfrac{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \cos n\alpha}{\sin u\alpha_1 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \sin n\alpha} \\ \operatorname{tg}^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \operatorname{tg} \dfrac{(\alpha_1-\alpha)^n}{2} = i^n \dfrac{\sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \cos n\alpha} \end{cases}$$

valabile numai pentru valorile lui n cu soț. Cele | corespunzătoare valorilor fără soț ale lui n sunt:

$$(g')\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} = i^{n+1} \dfrac{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots - \cos n\alpha}{\sin n\alpha_1 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \sin n\alpha} \\ \operatorname{tg}^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} = i^{n-1} \dfrac{\sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}{\cos n\alpha_1 + C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \cos n\alpha} \\ \operatorname{tg}^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} = i^{n-1} \dfrac{\sin n\alpha - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}{\sin n\alpha_1 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \sin n\alpha} \\ \operatorname{tg}^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} \operatorname{tg} \dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} = i^{n+1} \dfrac{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \cos n\alpha}{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1-\alpha] + \ldots + \cos n\alpha} \end{cases}$$

Prin adunarea și scăderea identităților (a) și (c) | primim identitățile:

$$(h)\qquad \begin{cases} \cos n\alpha_1 + C_n^2 \cos[(n-2)\alpha_1+2\alpha] + C_n^4 \cos[(n-4)\alpha_1+4\alpha] + \ldots + \cos n\alpha = \\ \qquad 2^{n-1} \cos \dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} \left[\cos^n \dfrac{\alpha_1+\alpha}{2} + i^n \sin^n \dfrac{\alpha_1+\alpha}{2}\right]; \\ \sin n\alpha_1 + C_n^2 \sin[(n-2)\alpha_1+2\alpha] + C_n^4 \sin[(n-4)\alpha_1+4\alpha] + \ldots + \sin n\alpha = \\ \qquad 2^{n-1} \sin \dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} \left[\cos^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} + i^n \sin^n \dfrac{\alpha_1+\alpha}{2}\right] \\ C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + C_n^3 \cos[(n-3)\alpha_1+3\alpha] + \ldots + C_n^{n-1} \cos[(\alpha_1+(n-1)\alpha] = \\ \qquad 2^{n-1} \cos \dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} \left[\cos^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} - i^n \sin^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2}\right] \\ C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + C_n^3 \sin[(n-3)\alpha_1+3\alpha] + \ldots + C_n^{n-1} \sin[\alpha_1+(n-1)\alpha] = \\ \qquad 2^{n-1} \sin \dfrac{(\alpha_1+\alpha)n}{2} \left[\cos^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2} - i^n \sin^n \dfrac{\alpha_1-\alpha}{2}\right] \end{cases}$$

valabile toate numai pentru n cu soț.

Din primele două mai deducem:

$$\operatorname{tg}\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}=\frac{\sin n\alpha_1+C_n^2\sin[(n-2)\alpha_1+2\alpha]+\ldots+\sin n\alpha}{\cos n\alpha_1+C_n^2\cos[(n-2)\alpha_1+2\alpha]+\ldots+\cos n\alpha}$$

iar din ultimele două:

$$\operatorname{tg}\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}=\frac{C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+C_n^3\sin[(n-3)\alpha_1+3\alpha]+\ldots+C_n^{n-1}\sin[\alpha_1+(n-1)\alpha]}{C_n^1\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha]+C_n^3\cos[(n-3)\alpha_1+3\alpha]+\ldots+C_n^{n-1}\cos[\alpha_1+(n-1)\alpha]}$$

ambele valabile pentru n cu soț.

Din aceste 2 mai deducem și identitatea:

$$\frac{\sin n\alpha_1+C_n^2\sin[(n-2)\alpha_1+2\alpha]+C_n^4\sin[(n-4)\alpha_1+4\alpha]+\ldots+\sin n\alpha}{\cos n\alpha_1+C_n^2\cos[(n-2)\alpha_1+2\alpha]+C_n^4\sin[(n-4)\alpha_1+4\alpha]+\ldots+\cos n\alpha}=$$

$$\frac{C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+C_n^3\sin[(n-3)\alpha_1+3\alpha]+\ldots+C_n^{n-1}\sin[\alpha_1+(n-1)\alpha]}{C_n^1\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha]+C_n^3\cos[(n-3)\alpha_1+3\alpha]+\ldots+C_n^{n-1}\cos[\alpha_1+(n-1)\alpha]}$$

valabilă și ea numai pentru n cu soț.

Din identitățile (a) și (d) deducem identitățile următoare:

$$(h')\quad\begin{cases}\cos n\alpha_1+C_n^2\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha]+C_n^4\cos[(n-4)\alpha_1+4\alpha]+\ldots+C_n^{n-1}\cos[\alpha_1+(n-1)\alpha]=\\ \qquad 2^{n-1}\left[\cos^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}+i^{n-1}\sin^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right]\\ \sin n\alpha_1+C_n^2\sin[(n-2)\alpha_1+2\alpha]+C_n^4\sin[(n-4)\alpha_1+4\alpha]+\ldots+C_n^{n-1}[\alpha_1+(n-1)\alpha]=\\ \qquad 2^{n-1}\left[\cos^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}+i^{n-1}\sin^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right]\\ C_n^1\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha]+C_n^3\cos[(n-3)\alpha_1+3\alpha]+\ldots+C_n^{n-2}\cos[(2\alpha_1+(n-2)\alpha]+\cos n\alpha=\\ \qquad 2^{n-1}\left[\cos^n\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}-i^{n+1}\sin^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right]\\ C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+C_n^3\sin[(n-3)\alpha_1+3\alpha]+\ldots+C_n^{n-2}\sin[2\alpha_1+(n-2)\alpha]+\sin n\alpha=\\ \qquad 2^n\left[\cos^n\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\sin\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}-i^{n-1}\sin_1\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right]\end{cases}$$

toate patru fiind valabile numai pentru n fără soț.

Dacă în aceste ultime patru identități am face diferite împărțiri între ele am da peste alte identități cari ar fi valabile pentru valorile fără soț ale lui n.

Cazuri particulare.

Dacă în identitățile (a) facem transformarea $\alpha=0$ primim:

$$(j)\quad\begin{cases}\cos n\alpha+C_n^1\cos(n-1)\alpha_1+C_n^2\cos(n-2)\alpha_1+\ldots+C_n^{n+1}\cos\alpha_1+1=2^n\cos^n\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{n\alpha_1}{2}\\ \sin n\alpha_1+C_n^1\sin(n-1)\alpha_1+C_n^2\sin(n-2)\alpha_1+\ldots+C_n^{n-1}\sin\alpha_1=2^n\cos^n\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{n\alpha_1}{2}\end{cases}$$

Exemplu. Pentru $n=1$:

$$\cos\alpha_1+1=2\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2}=2\cos^2\frac{\alpha_1}{2}$$

$$\sin\alpha_1=2\cos\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_1}{2}$$

ambele identităţi bine cunoscute în trigonometrie.

Pentru aceiaşi transformare identităţile (b) şi (c) devin identităţile:

$$(l)\quad\begin{cases}\cos n\alpha_1-C_n^1\cos(n-1)\alpha_1+C_n^2\cos(n-2)\alpha_1-\ldots-C_n^{n-1}\cos\alpha_1+1=2^n i^n\sin^n\dfrac{\alpha_1}{2}\cos\dfrac{n\alpha_1}{2}\\ \sin n\alpha_1-C_n^1\sin(n-\alpha)\alpha_1+C_n^2\sin(n-2)\alpha_1-\ldots-C_n^{n-1}\sin\alpha_1=2^n i^n\sin^n\dfrac{\alpha_1}{2}\sin\dfrac{n\alpha_1}{2}\end{cases}$$

$$(m)\quad\begin{cases}\cos n\alpha_1-C_n^1\cos(n-1)\alpha_1+C_n^2\cos(n-2)\alpha_1-\ldots+C_n^{n-1}\cos\alpha_1-1=2^n i^{n+1}\sin^n\dfrac{\alpha_1}{2}\sin\dfrac{n\alpha_1}{2}\\ \sin n\alpha_1-C_n^1\sin(n-1)\alpha_1+C_n^2\sin(n-2)\alpha_1-\ldots+C_n^{n-1}\sin\alpha_1=2^n i^{n-1}\sin^n\dfrac{\alpha_1}{2}\cos\dfrac{n\alpha_1}{3}\end{cases}$$

identităţile (l) fiind adevărate numai pentru n cu soţ iar cele (m) pentru n fără soţ.

Exemplu. Pentru $n=2$ identităţile (l) devin:

$$\cos 2\alpha_1-2\cos\alpha_1+1=-4\sin^2\frac{\alpha_1}{2}\cos\alpha_1$$

$$\sin 2\alpha_1-2\sin\alpha=-4\sin^2\frac{\alpha_1}{2}\sin\alpha_1$$

identităţi ce se pot verifica uşor.

Pentru $n=1$ identităţile (m) devin:

$$\cos\alpha_1-1=-2\sin^2\frac{\alpha_1}{2}$$

$$\sin\alpha_1=2\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2}$$

identităţi bine cunoscute.

In mod analog putem particutariza identităţile (d), (e), (f) etc.

Ne propunem acuma să stabilim identităţile:

$$(n)\quad\begin{cases}\cos^2 ny+C_n^1\cos^2[(n-1)y+x)+\\ \ldots+C_n^k\cos^2[(n-k)y+kx]+\ldots+\cos^2 nx=\\ 2^{n-1}[1+\cos^n(y-x)\cos(y+x)n]\\ \sin^2 ny+C_n^1\sin^2[(n-1)y+x]+\\ \ldots+C_n^k\sin^2[(n-k)y+kx]+\ldots+\sin^2 nx=\\ 2^{n-1}[1-\cos^n(y-x)\cos(y+x)n]\end{cases}$$

Pentru aceasta considerăm identităţile:

$$\cos n\alpha_1+C_n^1\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha]+$$

$$\ldots+C_n^k\cos[(n-k)\alpha_1+k\alpha]+\ldots+\cos n\alpha=$$

$$2^n\cos^n\frac{\alpha_1+\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}$$

$$1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$$

pe cari adunându-le şi ţinând seamă că avem:

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

obţinem identitatea:

$$\cos^2\frac{n\alpha_1}{2}+C_n^1\cos^2\frac{[(n-1)\alpha_1+\alpha]}{2}+\ldots+\cos^n\frac{n\alpha}{2}=$$

$$2^{n-1}\left[1+\cos^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right]$$

în care făcând înlocuirea: $\alpha_1=2y$ şi $\alpha=2x$ primim prima din identităţile (n).

Prin scăderea identităţilor considerate deducem:

$$\sin^2\frac{n\alpha_1}{2}+C_n^1\sin^2\frac{[(n-1)\alpha_1+\alpha]}{2}+\ldots+\sin^2\frac{n\alpha}{2}=$$

$$2^{n-1}\left[1-\cos^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)n}{2}\right]$$

şi făcând şi aci înlocuirea $\alpha_1=2y$ şi $\alpha=2x$ obţinem a doua din identităţile (n).

Pentru cazul particular când $x=0$ identităţile (n) devin:

$$(n')\begin{cases}\cos^2 n\,y + C_n^1 \cos^2 (n-1)\,y + \\ \ldots + C_n^k \cos^2 (n-k)\,y + \ldots + C_n^{n-1}\cos^2 y + 1 = \\ 2^{n-1}\,[1 + \cos^n y \cos n\,y] \\ \sin^2 n\,y + C_n^1 \sin^2 (n-1)\,y + \\ \ldots + C_n^k \sin^2 (n-k)\,y + \ldots + C_n^{n-1}\sin^2 y = \\ 2^{n-1}\,[1 - \cos^n y \cos n\,y]\end{cases}$$

Exemplu. Pentru $n = 1$:

$$\cos^2 y + 1 = 1 + \cos^2 y$$

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$$

identităţi evidente.

NOTE MATEMATICE

14. — *Asupra unor identităţi.*

In „R. M. T." anul IX, pagina 83 se stabilesc identităţile :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)} = n\,i\sqrt{2}\,\frac{(1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}}{(1+i)^n - (1-i)^n}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)} = (\sqrt{2})^n\,\frac{(-i)^n - i^n}{(1+i)^n - (1-i)^n}$$

In rândurile ce urmează îmi propun să stabilesc aceste identităţi în alt mod de cum sunt stabilite la pagina 83.

Pentru aceasta consider ecuaţiunea :

$$(1)\quad (\sin n\alpha_1)\,x^n - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha]\,x^{n-1} + C_n^2 \sin[(n-2)\alpha_1 + 2\alpha]\,x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sin n\alpha = 0$$

cu rădăcinele :

$$x = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)} \qquad (k = 0, 1 \ldots n-1)$$

Dacă în această ecuaţie fac :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

ecuaţiunea (1) devine :

$$(2)\quad \left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)x^n - C_n^1 \sin\left[(n-1)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right] + \ldots + (-1)^n \sin\frac{n\pi}{2} = 0$$

cu rădăcinile :

$$x = \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)} \qquad (k = 0, 1 \ldots n-1)$$

Scriind prima relaţie dintre coeficienţi şi rădăcini am :

$$(3)\quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)} = n\,\frac{\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right]}{\sin\frac{n\pi}{n}} = \frac{n}{\sqrt{2}}\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4}\right)$$

Expresiunea $1 + \operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4}$ o mai pot exprima şi în alt mod. Consider identităţile evidente :

$$(4)\quad \begin{cases}\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (1+i)^n \\ \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (1-1)^n\end{cases}$$

Prin adunare şi scădere deduc :

$$\cos\frac{n\pi}{4} = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2\,(\sqrt{2})^n}$$

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2\,i\,(\sqrt{2})^n}$$

Deduc deasemenea şi relaţiile :

$$\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4} = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i\,(1+i)^n - i\,(1-i)^n}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4} = \frac{i\,(1+i)^n + i\,(1-i)^n}{(1+i)^n - (1-i)^n}$$

Expresiunea $1 + \operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4}$ va fi deci ;

$$1 + \frac{i\,(1+i)^n + i\,(1-i)^n}{(1+i)^n - (1-i)^n} = \frac{2\,i\,(1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}}{(1+i)^n - (1-i)^n}$$

Inlocuind această valoare în (3), am:

$$\sum_{n=0}^{n-1} \frac{\cos\frac{n\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{n}{\sqrt{2}}\, 2i \frac{(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}}{(1+i)^n-(1-i)^n} =$$

$$n i \sqrt{2}\, \frac{(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}}{(1+i)^n-(1-i)^n}$$

și deci identitatea primă e stabilită.

Scriind acum ultima relație dintre coeficienți și rădăcini am:

$$(5) \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)} = (-i)^n \sin\frac{n\pi}{2} : \sin\frac{n\pi}{4}$$

Ținând seamă că am:

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{(1+i)^{2n}-(1-i)^{2n}}{2i(\sqrt{2})^{2n}} = \frac{i^n-(-i)^n}{2i}$$

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{(2i\sqrt{2})^n},$$

identitatea (5) devine:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)} = (-i)^n \frac{\frac{i^n-(-i)^n}{2i}}{\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i(\sqrt{2})^n}} =$$

$$(\sqrt{2})^n \frac{(-i)^n-i^n}{(1+i)^n-(1-i)^n}$$

astfel am stabilit și identitatea doua.

15. — *Generalizarea problemelor 861 și 931 R. M. T.*

Calea urmată la rezolvarea acestor probleme, este susceptibilă de generalizare.

In adevăr, aplicând teorema creșterilor finite, funcțiunii:

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

avem:

$$b^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m}{n}} = f'\left(c^{\frac{m}{n}}\right)(b-a) = \frac{m}{n} c^{\frac{m-n}{n}} (b-a) =$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[n]{c^{n-m}}}$$

sau:

$$\sqrt[n]{c^{n-m}} = \frac{m}{n} \frac{b-a}{\sqrt[n]{b^m}-\sqrt[n]{a^m}}$$

și ținând seamă că proprietatea e adevărată pentru $a<c<b$, putem scri:

$$\sqrt[n]{a^{n-m}} < \frac{m}{n} \frac{b-a}{\sqrt[n]{b^m}-\sqrt[n]{a^m}} < \sqrt[n]{b^{n-m}}$$

pentru $m=5$, $n=8$, avem problema 931.

Ridicând la puterea n și făcând $m=3$, $n=4$, avem problema 861.

N. MIHAILEANU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVI, No. 11 Iulie 1931. Généralisation du théorème de *D'Ocagne* sur la courbure du contoul apparent d'une surface, par *R. Goormaghtigh*. Relațiuni între triunghiurile sferice și unghiurile triedre, de *N. Abramescu*. Asupra unui determinant, de *T. Popovici*.

2. *Bulletin de Mathèmatiques et de Physique, pures et appliquées de l'école Polytechnique „Roi Carol II" Bucarest*, anul 2-lea (No. 2, 1930—1931). Sur une propriété des fonctions holomorphe et sur un problème de Géométrie élémentaire, par *M. D. Pompeiu*.

Sur une propriété intégrale caractéristique des fonctions linéaires, par *M. Stefane Petralia*. Sur le théorème de la moyenne, par *M. Ernest Abason*. Sur l'équation aréolaire linèaire, par *M. M. Ghermanesco*. Similitude en hydrodynamique, par *M. Ghermani*. Sur la variation de couleur du chlorure de cobalt, par *M. Er. Toporescu*. Sur les raies ultimes des spectres d'etincelle condensée par *M. Ir. Negresco*.

Quelques observations sur le calcul algébrique des ponts suspendus, par *M. G. Borneanu*.

Sur le calcul des pièces en béton frette, par *M. M. Hangan*. Étude des oscilations des machines syncrones sur un modéle mécanique, par *M. I. S. Gheorghiu*. L'anniversaire de l'école Poiytechnique *„Roi Carol II"*.

3. *Gr. C. Moisil*. Sur une classe de systèmes d'èquations aux dérivées partielles de la Physique mathématique.

4. *Gr. C. Moisil*. Sur les réperes mobiles dans l'espace fonctionnel. (Extrait de Rendiconti della Accademia du Lincei).

5. *Gr. C. Moisil*. Sur l'équation $\Delta u = 0$. (Extrait des comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, novembre 1930).

6. *Gr. C. Moisil*. Sur la mécanique ondulatoire des champes d'ondes. (Extrait des comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, janvier 1931).

PROBLEME REZOLVATE

914. — *Se cere patratul perfect* $\overline{a\,b\,c\,d\,b\,c\,d}$ *știind că:*

$$2a + c = d - 1$$

HARALAMB P. IONESCU

d fiind terminația unui patrat perfect, poate fi:

(1) $\qquad 0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9$

Ținând seamă că a este cel puțin 1, rezultă din relația dată:

$$d \geqq 3$$

și având în vedere valorile din (1) pe care le poate avea d, rezultă:

$$d = 4,\ 5,\ 6,\ 9$$

1°. Dacă luăm $d = 4$, din relația de condiție dată, rezultă:

$$a = 1, \qquad c = 1,$$

și în acest caz $c\,d$ ar fi 14, cu care nu se poate termina un patrat perfect.

Rezultă că în acest caz n'avem soluție.

2°. Dacă luăm $d = 5$, atunci rezultă din relația de condiție:

$$a = 1, \qquad c = 2,$$

sau:

$$a = 2, \qquad c = 0.$$

Dar $a = 2$, $c = 0$, nu poate da soluție, căci $c\,d$ ar fi în acest caz 05, cu care nu se poate termina un patrat perfect.

Rămâne $a = 1$, $c = 2$, în care caz numărul cerut ar fi de forma, $1\,b\,25\,b\,25$.

Dând lui b pe rând cifrele de la 0 la 9 inclusiv și cercetând care din aceste numere sunt patrate perfecte, găsim că numai numărul:

$$1625625 = 1275^2$$

satisface enunțul, fiind patrat perfect.

3°. Dacă $d = 6$, rezultă din condiția dată:

$$a = 1, \qquad c = 3$$

sau:

$$a = 2, \qquad c = 1$$

Numărul cerut poate fi deci de forma:

$$1\,b\,36\,b\,36 \quad \text{sau} \quad 2\,b\,16\,b\,16$$

Punând în locul lui b pe rând cifrele de la 0 la 9 înclusiv, găsim că numai numărnl;

$$1336336 = 1156^2$$

satisface enunțul, fiind patrat perfect.

4°. Dacă $d = 9$, rezultă sistemele de valori.

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ c = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3 \\ c = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 4 \\ c = 0, \end{cases}$$

Rezultă că numărul dat poate fi de formele:

$$1\,b\,69\,b\,69, \quad 2\,b\,49\,b\,49, \quad 3\,b\,29\,b\,29, \quad 4\,b\,09\,b\,09.$$

Luând pentru b pe rând toate cifrele de la 0 la 9 inclusiv, și căutând care sunt patrate perfecte, găsim că numai numărul:

$$4609609 = 2147^2$$

satisface enunțul.

Rezultă astfel pentru problemă următoarele trei soluții:

1336336, 16256, și 4600609

Au găsit toate cele trei soluții, d-nii: *Crivăț I. Vladimir* (bacalaureat, București), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, Bucureș'i), *Grecu M. Cristache* (Lic., Oltenița), *Jeba C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanța), *Russu D. C-tin* (Lic., Constanța).

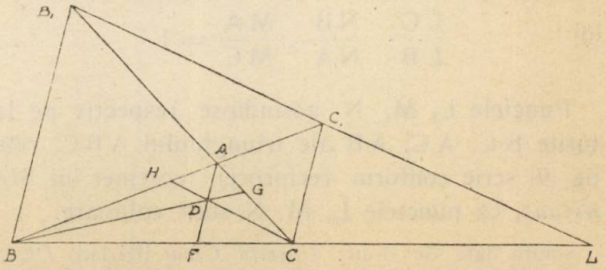
Au găsit numai două soluții, d-nii: *Boerescu P. George* (Lic., Oltenița), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Marineanu Traian* (student, București), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenița), *Purdilă A.* (Lic., Brașov), *Smărăndoiu N.* (bacalaureat).

Au găsit numai o singură soluție, d-nii: *Bujoreanu Vicențiu* (bacalaureat), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic, Roman), *Marșieu Teodor* (Șc, Polit., Timișoara), *Mereuță Emilian* (Șc. Polit., București), *Millea G. Ene* (Șc. Milit. de Artilerie), *Nicoalescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Parepeanu I.* (Lic., Brașov) și *Sâmbotin Gh.*

937. — *Fie un triunghiu oarecare* A B C *și trei ceviene. Paralelele din* B *și* C *la ceviana din* A *tae pe* C A *și* B A *respectiv în* B_1 *și* C_1. *Să se demonstreze că punctele* ($B_1 C_1$, B C) *și analoagele lui sunt colineare.*

SUB-LT. AURELIAN STAN

Fie A F, B G și C H ceviene în triunghiul A B C și L intersecția lui $B_1 C_1$ construită conform enunțului, cu B C.



Din asemănarea triunghiurilor $B C_1 C$ și B A F, deducem:

(1) $$\frac{C_1C}{AF} = \frac{CB}{FB}$$

Apoi din asemânarea triunghilor BB_1C şi FAC, avem:

(2) $$\frac{B_1B}{AF} = \frac{BC}{FC}$$

Impărţind (1) prin (2), găsim:

(3) $$\frac{C_1C}{B_1B} = -\frac{FC}{FB}$$

Din asemânarea triunghiurilor LC_1C şi LB_1B, deducem:

(4) $$\frac{LC}{LB} = \frac{C_1C}{B_1B}$$

Din comparaţia relaţiilor (3) şi (4) rezultă:

(5) $$\frac{LC}{LB} = -\frac{FC}{FB}$$

Acum dacă M şi N sunt punctele analoage lui L respectiv pe AC şi AB, rezultă că avem analog relaţiei (5) şi relaţiele:

(6) $$\frac{MA}{MC} = -\frac{GA}{GC}$$

(7) $$\frac{NB}{NA} = -\frac{HB}{HA}$$

Multiplicând relaţiile (5), (7) şi (6) obţinem:

(8) $$\frac{LC}{LB}\cdot\frac{NB}{NA}\cdot\frac{MA}{MC} = -\frac{FC}{FB}\cdot\frac{HB}{HA}\cdot\frac{GA}{GC}$$

Cum AF, BG, CH sunt ceviene în triunghiul ABC, ştim că avem conform teoremei lui *Ceva*:

$$\frac{FC}{FB}\cdot\frac{HB}{HA}\cdot\frac{GA}{GC} = -1$$

şi atunci relaţia (8) se reduce la următoarea:

(9) $$\frac{LC}{LB}\cdot\frac{NB}{NA}\cdot\frac{MA}{MC} = 1.$$

Punctele L, M, N găsindu-se respectiv pe laturile BC, AC, AB ale triunghiului ABC, relaţia (9) scrie conform reciprocei teoremei lui *Menelaus*, că punctele L, M, N sunt coliniare.

Soluţii date de d-nii: *Coşniţă Cezar* (Bârlad) *Dăscălescu Hristache* (student, Bucureşti), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), şi *Pop I. Leontin* (Şc. Polit., Timişoara).

Observare făcută de d-l *Cosniţă Cezar.*

Relaţia (5) ne spune că punctul L este conjugat armonic cu F faţă de B şi C; analog punctul M este conjugat armonic cu G faţă de A, C şi punctul N este conjugat armonic cu H faţă de A, B. De aci rezultă că punctele L, M, N sunt coliniare şi anume sunt pe polara triliniară a punctului D în raport cu triunghiul ABC.

Alte soluţie. D-l *Coşniţă Cezar*, dă încă următoarea soluţie elegantă. Triunghiurile BB_1G, CC_1H sunt omologice. In adevăr, laturile (BB_1, CC_1) (BG, CH), (B_1G, C_1H), se taie în trei puncte colineare: ∞, D, A. Rezultă atunci după teorema lui *Desargues*, că dreptele care unesc vârfurile corespunzătoare sunt cuncurente, anume: B_1C_1, BC, GH. Dar punctul (BC, GH) este conjugatul lui F faţă de B, C. Deci şi B_1C_1 trece prin conjugatul lui F faţă de B_1C. L fiind conjugatul lui F faţă de B_1C, rezultă conform observărei de mai sus că punctele L, M, N sunt colineare.

978. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{\sin 3\alpha_1 \sin^3\alpha - \sin 3\alpha \sin^3\alpha_1}{3\sin\alpha\sin\alpha_1} = \sin(2\alpha_1+\alpha)\sin\alpha - \sin(\alpha_1+2\alpha)\sin\alpha_1$$

Să se verifice în cazul $\alpha = 30^0$, $\alpha_1 = 45^0$.

V. ALACI

Insemnăm pentru prescurtare cu E_1 şi E_2 respectiv cei doi membri ai identităţii date.

Folosind relaţia cunoscută:

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$

putem scri succesiv:

(1) $$E_1 = \frac{(3\sin\alpha_1 - 4\sin^3\alpha_1)\sin^3\alpha - (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)\sin^3\alpha_1}{3\sin\alpha\sin\alpha_1} =$$

$$\frac{3\sin\alpha\sin\alpha_1(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_1)}{3\sin\alpha\sin\alpha_1} = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha_1$$

Dezvoltăm şi membrul al 2-lea şi obţinem succesiv:

(2) $$E_2 = \sin 2\alpha_1\cos\alpha\sin\alpha + \cos 2\alpha_1\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_1\cos 2\alpha - \cos\alpha_1\sin 2\alpha\sin\alpha_1 =$$

$$\frac{\sin 2\alpha_1\sin 2\alpha}{2} + (1-2\sin^2\alpha_1)\sin^2\alpha -$$

$$(1-2\sin^2\alpha_1)\sin^2\alpha_1 - \frac{\sin 2\alpha\sin 2\alpha_1}{2} =$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_1$$

Comparând relaţiile (1) şi (2), rezultă:

$$E_1 = E_2$$

deci identitatea dată estă stabilită.

In cazul particular $\alpha = 30^0, \alpha_1 = 45^0$, observând că:

$$\sin 3\alpha_1 = \sin 135^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\alpha = \sin 30^0 = \frac{1}{2}, \sin 3\alpha = 1$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(\alpha_1 + \alpha) = \sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin(\alpha_1 + 2\alpha) = \sin 105^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

identitatea dată devine:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{8} - \frac{2\sqrt{2}}{8}}{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

sau:

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

ceea ce este evident.

Soluţii date de d-nii: *Bâcicov Boris* (Tighina), *Bâcicov Victor* (student, Iaşi), *Beral Haim* (Lic. Naţional Iaşi), *Costăchescu C. C-tin* (Lic. Milit., Iaşi), *David M.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Dumitraşcu M. Romeo* (Lic., Roman), *Gall T.* (Şc. Milit. de Art.), *Grünberg M.* (Tighina), *Ioachim C. Gh.* (Craiova), *Lupescu Gh. C-tin* Roman), *Mereuţă Emilian* (student Bucureşti), *Mihăilescu N.* (Lic., Constanţa), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Pănoiu E. Em.* (Lic. Carol, Craiova), *Pascaru L. I.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Popa Nicolae* (Lic., Constanţa), *Russu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Sâmbotin Gh.*, *Şerban A. Teodor* (Lic. Milit., Iaşi) şi *Vonica C. Ion* (Şc. Milit. de Artilerie):

Altă soluţie. Generalizare. D-l *Marşiu Teodor* (Şc, Polit., Timişoara), a sesizat origina identităţei ce am propus'o ceia ce ia permis următoarea generalizare:

Să se verifice identitatea:

$$(3)\quad \frac{\sin n\alpha_1 \sin^n\alpha + (-1)^n \sin n\alpha \sin^n\alpha_1}{n\sin\alpha\sin\alpha_1} =$$

$$\sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha]\sin^{n-2}\alpha -$$

$$\frac{n-1}{2!}\sin[(n-2)\alpha_1 + 2\alpha]\sin^{n-3}\alpha\sin\alpha_1 +$$

$$\ldots + (-1)^{n-2}\frac{n-1}{2!}\sin[2\alpha_1 + (n-2)\alpha]\sin\alpha\sin^{n-2}\alpha_1 +$$

$$(-1)^{n-1}\sin[\alpha_1 + (n-1)\alpha]\sin^{n-2}\alpha_1$$

Pentru a stabili această identitate, considerăm ecuaţiunea:

$$(4)\quad (\sin n\alpha_1)x^n - \frac{n}{1}\sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha].x^{n-1} +$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{1}\sin[\alpha_1 + (n-1)\alpha].x + (-1)^n \sin n\alpha = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$x = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

(A se vedea articolul *„O clasă de ecuaţiuni cu rădăcinele reale“* din „R. M. T.“ an XI, No. 3).

Pentru $k = 0$, avem rădăcina:

$$x = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$

Această fiind o rădăcină a ecuaţiei (4), substituind-o în ecuaţie, obţinem o identitate, anume:

$$\sin n\alpha_1 \frac{\sin^n\alpha}{\sin^n\alpha_1} - \frac{n}{1}\sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha]\frac{\sin^{n-1}\alpha}{\sin^{n-1}\alpha_1} +$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\sin[(n-2)\alpha_1 + 2\alpha]\frac{\sin^{n-3}\alpha}{\sin^{n-3}\alpha_1} -$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\sin[\alpha_1 + (n-1)\alpha].\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} +$$

$$(-1)^n \sin n\alpha = 0$$

Inmulţind ambii membri cu $\sin^n\alpha_1$, apoi păstrând primul şi ultimul termen în membrul întâiu, avem:

$$\sin n\alpha_1 \sin^n\alpha + (-1)^n \sin n\alpha \sin^n\alpha_1 =$$

$$\frac{n}{1}[(n-1)\alpha_1 + \alpha]\sin^{n-1}\alpha\sin\alpha_1 -$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\sin[(n-2)\alpha_1 + 2\alpha_1]\sin^{n-2}\alpha\sin^2\alpha +$$

$$\ldots - (-1)^{n-1}\sin[\alpha_1 + (n-1)\alpha]\sin\alpha.\sin^{n-1}\alpha_1$$

Impărţind ambii membrii prin $n\sin\alpha\sin\alpha_1$, obţinem:

$$\frac{\sin n\alpha_1 \sin^n\alpha + (-1)^n \sin n\alpha \sin^n\alpha_1}{n\sin\alpha\sin\alpha_1} =$$

$$\sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha]\sin^{n-2}\alpha -$$

$$\frac{n-1}{1.2}\sin[(n-2)\alpha_1 + 2\alpha]\sin^{n-3}\alpha\sin\alpha_1 +$$

$$\ldots - (-1)^{n-1} \sin[\alpha_1 + (n-1)\alpha] \sin^{n-2}\alpha_1,$$

care este tocmai identitatea (3).

Dacă în această identitate luăm $n = 3$ găsim:

$$\frac{\sin 3\alpha_1 \sin^3\alpha - \sin 3\alpha \sin^3\alpha_1}{3 \sin\alpha \sin\alpha_1} =$$

$$\sin(2\alpha_1 + \alpha) \sin\alpha - \sin(\alpha_1 + 2\alpha) \sin\alpha_1,$$

arce este tocmai identitatea propusă.

Observare. D-l *Jeba* C. C-*tin* (Şc. Polit., Timişoara) a dat o soluţie analoagă cu aceasta din urmă, fără generalizare:

PROBLEME PROPUSE

1023. Să se arate că dacă n este impar expresiunea:

$$1946^{3n-2} + 3^{6n+9} + 32^3 \cdot 739^n + 1,$$

se divide cu 69.

CEZAR IVANESCU

1024, — Un călător pleacă cu trenul personal dela *Craiova* spre *Timişoara*. Pe drum îşi aduce aminte că a uitat acasă nişte acte. La *Severin* întâlneşte acceleratul care merge spre *Bucureşti*. Se duce în accelerat şi ajunge înapoi la *Craiova* cu o oră mai repede de cât sar fi dus cu personalul. Ce distanţă este în kilometri între *Craiova* şi *Severin* dacă viteza mijlocie a personalului este de 502 m. pe minut, iar a acceleratului este de 685 m. pe minut.

I. DUMITRIU-DADA

1025. — Să ce determine a astfel ca ecuaţia:

$$\sqrt[3]{3x - 3\sqrt[3]{3x^3 - 33x^2 + 33x - 33a}} = 3$$

să admită o rădăcină egală cu 3 şi să se rezolve în acest caz ecuaţia.

TEODOR MARSIEU

1026. — Să se stabilească identitatea:

$$2\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-1}^{i} C_{m-1}^{i+1} = \frac{m-1}{2m-1} C_{2m}^{m}$$

SUB.-LT. A. I. STAN

1027. — Fie A_1 punctul diametral opus vârfului A al triunghiului ABC în cercul circumscris, iar A′ punctul în care AA_1 tae pe BC. Perpendiculara în A′ pe AA′ tae laturile AB, AC în M_1N.

Punctele A, M, A_1, N sunt pe un cerc care are centrul pe înălţimea care pleacă din A în triunghiul ABC.

CEZAR COSNITA

1028. — Laturile unni triunghiu ABC sunt a, b, c.

Pe latura a se contrueşte patratul BDEC, pe latura b se construeşte triunghiul echilateral ACF şi pe latura c se construeşte trapezul isoscel ABGH, astfel că baza mică este c, baza mare este $3c$, iar înălţimea este $\frac{c\sqrt{3}}{8}$.

Ce relaţie trebuie să existe între laturile a, b, c ale triunghiului, astfel ca suprafaţa patratului BDEC să fie suma suprafeţelor triunghiului ACF şi a trapezului isoscel ABGH?

ROMEO N. DUMITRASCU

1029. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \operatorname{arctg}\frac{y-z}{1+yz} + \operatorname{arctg}\frac{z-x}{1+zx} = k\pi + a \\ \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} + \operatorname{arctg}\frac{y+z}{1-yz} + \operatorname{arctg}\frac{z-x}{1+zx} = k_1\pi + b \\ \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} + \operatorname{arctg}\frac{y-z}{1+yz} + \operatorname{arctg}\frac{z+x}{1-zx} = k_2\pi + c \end{cases}$$

Cazul particular:

$k = k_1 = k_2 = 0$, $a = 60^0$, $b = 90^0$, $c = 120^0$.

SUB.-LT. ION C. CRISTESCU-POTLOGI

1030. — Să se stabilească următoarea formulă calculabilă prin logaritmi:

$$\frac{\sin 3\alpha_1 + 2\sin(2\alpha_1 + \alpha) + \sin(\alpha_1 + 2\alpha)}{\sin 3\alpha_1 + 3\sin(2\alpha_1 + \alpha) + 3\sin(\alpha_1 + 2\alpha) + \sin 3\alpha} = \frac{\sin(\alpha + 2\alpha_1)}{2\cos\frac{\alpha - \alpha_1}{2} \sin\frac{3(\alpha + \alpha_1)}{2}}$$

Să se verifice pentru $\alpha_1 = 0$.

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii: *F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos* și *J. Tschlek,* Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann,* La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale,* Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez,* Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell,* Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff,* Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera,* S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky,* Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler.* Washington (Statele Unite), *J. Shohat,* Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville,* Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault,* Le Mans (Francia), *O. Szász,* Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti,* Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XI. 15 SEPTEMVRIE 1931 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 V. ALACI ASUPRA UNOR IDENTITATI TRIGONOMETRICE
2. NOTE MATEMATICE: 16, 17,
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 915, 982, 983, 985, 986
5. PROBLEME PROPUSE: 1031-1038
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei.

ANUL XI—No. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMVRIE 1931

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

ASUPRA UNOR IDENTITAȚI TRIGONOMETRICE

de V. ALACI

1. In articolul din numărul precedent al acestei *Reviste*, *d-l Marșieu* a stabilit printr'o metodă elegantă și simplă, câteva identități trigonometrice, folosind în mod abil, formula lui *Moivre*.

Astfel dacă notăm:

$$S_1 = \cos n\alpha_1 + C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1 + \alpha] + \ldots + \cos n\alpha,$$

$$S_2 = \sin n\alpha_1 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha] - \ldots + \sin n\alpha$$

$$S_3 = \cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1 + \alpha] + \ldots + (-1)^n \cos n\alpha^n$$

$$S_4 = \sin n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1 + \alpha] + \ldots + (-1)^n \sin n\alpha$$

atunci identitățile stabilite de d-l *Marșieu*, sunt:

$$(1) \qquad S_1 = 2^n \cos^n \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} \cos \frac{n(\alpha_1 + \alpha)}{2}$$

$$(2) \qquad S_2 = 2^n \cos^n \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \sin \frac{n(\alpha_1 + \alpha)}{2}$$

$$(3) \quad S_3 = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin^n \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} \cos \frac{n(\alpha_1 + \alpha)}{2}$$

$$(4) \quad S_4 = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin^n \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} \sin \frac{n(\alpha_1 + \alpha)}{2}$$

Identitățile (3) și (4) sunt valabile numai pentru n par, iar pentru n impar avem:

$$(5) \quad S_3 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^n \sin^n \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} \sin \frac{n(\alpha_1 + \alpha)}{2}$$

$$(6) \quad S_4 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^n \sin^n \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} \cos \frac{n(\alpha_1 + \alpha)}{2}$$

Alte identități din articolul menționat sunt obținute prin împărțirea sau adunarea unora din identitățile de mai sus.

2. In cele ce urmează îmi propun să stabilesc identitățile menționate (1), (2), (3), (4), (5), (6), folosind însă altă metodă și anume folosind cunoștinți din teoria ecuațiilor, ceia ce ne va permite a stabili încă și alte identități interesante.

Pentru aceasta să considerăm ecuațiunea:

$$(7) \quad f(x) = (\sin n\alpha_1) x^n + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1 + \alpha] x^{n-1} + \ldots + \sin n\alpha = 0$$

cu rădăcinele:

$$(8) \quad x = -\frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

ecuațiune pe care am stabilit'o în articolul „O *clasă de ecuațiuni cu rădăcini reale*“, din „R. M. T.“ No. 3, an. XI (este ecuația (3) unde am luat $a = -1$).

Fiindcă cunoaștem rădăcinele ecuației (7), această ecuație se poate descompune într'un produs de factori liniari, anume:

$$(9) \quad f(x) = \sin n\alpha_1 \prod_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)} \right]$$

Dacă în această identitate luăm $x = 1$, deducem:

$$(10) \quad S_2 = \sin n\alpha_1 \prod_{k=0}^{n-1} \left[1 + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)} \right]$$

Dar:

$$1+\frac{\sin\left(\alpha-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{n}\right)}=$$

$$\frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)\cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2}}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{n}\right)},$$

astfel că relația (10) devine:

$$(11)\qquad S_2=2^n\cos^n\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin n\alpha_1\times$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha_1}{}-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{n}\right)}$$

De altă parte dacă în identitatea (9) facem $x=0$, obținem:

$$(12)\qquad \sin n\alpha=\sin n\alpha_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(\alpha-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Dacă în această identitate (12) înlocuim pe α prin $\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$, obținem identitatea:

$$(13)\qquad \sin\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}=$$

$$\sin n\alpha_1\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1--\frac{k\pi}{n}\right)}$$

In virtutea acestei identități, relația (11) devine:

$$(14)\qquad S_2=2^n\cos^n\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2},$$

care este tocmai identitatea (2).

3. Pentru a obține identitatea (1) înlocuim în identitatea (14) pe α și α_1 respectiv prin $\frac{\pi}{2n}-\alpha$, $\frac{\pi}{2n}-\alpha_1$ și observând că:

$$\sin\left[(n-k)\left(\frac{\pi}{2n}-\alpha_1\right)+k\left(\frac{\pi}{2n}-\alpha\right)\right]=$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}-(n-k)\alpha_1-k\alpha\right]=\cos[(n-k)\alpha_1+k\alpha]$$

$$(k=0,1,2\ldots n-1)$$

identitatea (14) se transformă astfel:

$$\cos n\alpha_1+C_n^1\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha]+\ldots+\cos n\alpha=$$

$$2^n\cos^n\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\left[\frac{\pi}{2}-\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}\right],$$

sau încă:

$$(15)\qquad S_1=2^n\cos^n\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\cos\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}$$

care este tocmai identitatea (1).

4. Pentru a obține celelalte identități (3), (4) (5), (6) procedăm astfel:

In identitatea (9) luăm $x=-1$ și avem:

$$(16)\quad (-1)^n S_4=\sin n\alpha_1\prod_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\sin\left(\alpha-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{n}\right)}-1\right]$$

Dar:

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{n}\right)}-1=$$

$$\frac{2\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\alpha}{n}\right)},$$

astfel că relația (16) devine:

$$(17)\qquad S_4=(-1)^n 2^n\sin^n\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin n\alpha_1\times$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{n}\right)}$$

De altă parte, dacă în identitatea (12) înlocuim pe α prin $\frac{\alpha+\alpha_1}{2}-\frac{\pi}{2}$, obținem identitatea:

$$(18)\qquad \sin\left[\frac{n\pi}{2}-\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}\right]=$$

$$(-1)^{n-1} \sin n\alpha_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}$$

In virtutea acestei identităţi relaţia (17) devine:

$$(19)\quad S_4 = -2^n \sin^n \frac{\alpha-\alpha_1}{2} \sin\left[\frac{n\pi}{2} - \frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}\right]$$

Pentru n par această identitate devine:

$$(20)\quad S_4 = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin^n \frac{\alpha-\alpha_1}{2} \sin\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2},$$

iar pent u n impar identitatea (19) ia forma:

$$(21)\quad S_4 = (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^n \sin^n \frac{\alpha-\alpha_1}{2} \cos\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}$$

Identităţile (20) şi (21) pe care le-am stabilit sunt tocmai identităţile (4) şi (6).

Dacă în identităţile (20) şi (21) înlocuim pe α şi α_1 respectiv prin $\frac{\pi}{2n} - \alpha, \frac{\pi}{2n} - \alpha_4$, obţinem:

$$(22)\quad S_3 = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin^n \frac{\alpha-\alpha_1}{2} \cos\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}$$

valabilă pentru n par şi:

$$(23)\quad S_3 = (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^n \sin^n \frac{\alpha-\alpha_1}{2} \sin\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}$$

valabilă pentru n impar:

Aceste identităţi (22) şi (23) sunt tocmai identităţile (3) şi (5). In punctele 2., 3. şi 4. am stabilit astfel identităţile (1), (2), (3), (4), (5) şi (6), ce ne propusesem.

Alte identităţi.

5. Vom stabili acum şi alte identităţi interesante, care pot fi privite ca formule calculabile prin logaritmi pentru expresiunile:

$$T_1 = \frac{n\sin n\alpha_1 + (n-1)C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^1 \sin[\alpha_1+(n-1)\alpha]}{\sin n\alpha_1 + C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \sin n\alpha}$$

$$T_2 = \frac{n\cos n\alpha_1 + (n-1)C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + C_n^1 \cos[\alpha_1+(n-1)\alpha]}{\cos n\alpha_1 + C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + \cos n\alpha}$$

$$T_3 = \frac{n\sin n\alpha_1 - (n-1)C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^1 \sin[\alpha_1+(n-1)\alpha]}{\sin n\alpha_1 - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^n \sin n\alpha}$$

$$T_4 = \frac{n\cos n\alpha_1 - (n-1)C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^1 \cos[\alpha_1+(n-1)\alpha]}{\cos n\alpha_1 - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] + \ldots + (-1)^n \cos n\alpha}$$

6. Pentru a transforma pe T_1 într'o formulă calculabilă prin logaritmi, pornim dela relaţia (9) căreia îi luăm derivata logaritmică şi obţinem astfel identitatea:

$$(24)\quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}}$$

Dacă în această identitate luăm $x=1$, deducem:

$$(25)\quad T_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}} =$$

$$\frac{1}{2\cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}$$

Să transformăm ultimul membru. Pentru aceasta observăm, că dacă în (24) luăm $x=1$, obţinem:

$$(26)\quad \frac{n\sin[\alpha_1+(n-1)\alpha]}{\sin n\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}$$

Dacă înlocuim aci pe α prin $\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$, avem:

$$(27)\quad \frac{n\sin\frac{(n-1)\alpha+(n+1)\alpha_1}{2}}{\sin\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}$$

In virtutea acestei identităţi, identitatea (25) devine:

$$(28) \qquad T_1 = \frac{n \sin \frac{(n-1)\alpha + (n+1)\alpha_1}{2}}{2 \cos \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \sin \frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}}$$

Aceasta este expresia simplă pentru T_1, calculabilă prin logaritmi.

7. Dacă în această expresiune a lui T_1, înlocuim α şi α_1 prin $\frac{\pi}{2n} - \alpha$, $\frac{\pi}{2n} - \alpha_1$, obţinem:

$$(29) \qquad T_2 = \frac{n \cos \frac{(n-1)\alpha + (n+1)\alpha_1}{2}}{2 \cos \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \cos \frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}},$$

care transformă pe T_2 în formulă calculabilă prin logaritmi.

8. Să calculăm acum pe T_3 şi T_4. Pentru aceasta observăm că dacă luăm $x = -1$ în identitatea (24), obţinem:

$$(30) \qquad -T_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)} - 1} =$$

$$\frac{1}{2 \sin \frac{\alpha - \alpha_1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}$$

Dar înlocuind în identitatea (26) α prin $\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \frac{\pi}{2}$, obţinem:

$$(31) \qquad \frac{n \sin\left[\frac{(n-1)\pi}{2} - \frac{(n-1)\alpha + (n+1\,\alpha_1)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{n\pi}{2} - \frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}\right]} =$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)}$$

In virtutea acestei identităţi, identatea (30) devine:

$$(31)\ T_3 = \frac{n \sin\left[\frac{(n-1)\pi}{2} - \frac{(n-1)\alpha + (n+1)\alpha_1)}{2}\right]}{2 \sin \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \sin\left[\frac{n\pi}{2} - \frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}\right]}$$

Dacă în această identitate înlocuim α şi α_1 prin $\frac{\pi}{2n} - \alpha_1$, $\frac{\pi}{2n} - \alpha$, obţinem:

$$(33)\ T_4 = \frac{n \cos\left[\frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{(n-1)\alpha + (n-1)\alpha_1}{2}\right]}{2 \sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} \cos\left[\frac{n\pi}{2} + \frac{n(\alpha-\alpha_1)}{2}\right]}$$

Identităţile (32) şi (33) ne dau formulele calculabile prin logaritmi pentru expresile T_3 şi T_4.

Observare. O altă identitate simplă interesantă se obţine împărţind pe T_1 prin T_2, anume:

$$(34) \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{(n-1)\alpha + (n+1)\alpha_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}}$$

Cazuri particulare. Particularizând formulele (28), (29), (32) şi (33), luând de exemplu $n = 2$, obţinăm următoarele identităţi, uşor de verificat şi pe cale directă:

$$\frac{\sin 2\alpha_1 + \sin(\alpha_1 + \alpha)}{\sin 2\alpha_1 + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha) + \sin 2\alpha} =$$

$$\frac{\sin \frac{\alpha + 3\alpha_1}{2}}{2 \cos \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \sin(\alpha + \alpha_1)}$$

$$\frac{\cos 2\alpha_1 + \cos(\alpha_1 + \alpha)}{\cos 2\alpha_1 + 2 \cos(\alpha_1 + \alpha) + \cos 2\alpha} =$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha + 3\alpha_1}{2}}{2 \cos \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \cos(\alpha + \alpha_1)}$$

$$\frac{\sin 2\alpha_1 - \sin(\alpha_1+\alpha)}{\sin 2\alpha_1 - 2\sin(\alpha_1+\alpha)+\sin 2\alpha} =$$

$$\frac{\cos\dfrac{\alpha+3\alpha_1}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin(\alpha+\alpha_1)}$$

$$\frac{\cos 2\alpha_1 - \cos(\alpha+\alpha_1)}{\cos 2\alpha_1 - 2\cos(\alpha_1+\alpha)+\cos 2\alpha} =$$

$$\frac{\sin\dfrac{\alpha+3\alpha_1}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos(\alpha+\alpha_1)}$$

9. *Altă metodă.* Identităţile (28), (29), (32) şi (33) se pot obţine şi pe o altă cale mai simplă.

Pentru aceasta pornim dela identitatea (14) şi privim ambii membrii ca funcţii de variabila α_1, astfel că derivând'o în raport cu α_1, obţinem:

$$S_2' = n\cos n\alpha_1 + (n-1)C_n^1\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha]+$$
$$\ldots + C_n^1\cos[\alpha_1+(n-1)\alpha] =$$
$$2^{n-1}n\cos^{n-1}\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\times$$
$$\left[\cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\cos\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}+\right.$$
$$\left.\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}\right]$$

$$\therefore \quad (35) \qquad S_2' = 2^{n-1}n\cos^{n-1}\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\cos\frac{(n-1)\alpha+(n+1)\alpha_1}{2}$$

Dacă împărţim această identitate (35) prin (15), obţinem:

$$T_2 = \frac{n\cos\dfrac{(n-1)\alpha+(n+1)\alpha_1}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}\cos\dfrac{n(\alpha+\alpha_2)}{2}}$$

care este identică cu (29).

In mod analog putem stabili expresiunile lui T_1, T_3, T_4 găsite mai sus.

Dacă împărţim identitatea (35) prin (14) obţinem încă identitatea:

$$(36)\quad \frac{S_2'}{S_2} = \frac{n\cos\dfrac{(n-1)\alpha+(n+1)\alpha_1}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\dfrac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}}$$

10. Putem să extindem această metodă prin derivare şi obţinem şi alte identităţi

Astfel dacă derivăm relaţia (35) în raport cu α, obţinem:

$$S_2'' = -\{(n-1)C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+$$
$$\ldots+(n-1)C_n^1\sin[\alpha_1+(n-1)\alpha]\} =$$
$$-2^{n-2}n(n-1)\cos^{n-2}\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\times$$
$$\left[\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\cos\frac{(n-1)\alpha+(n+1)\alpha_1}{2}+\right.$$
$$\left.\cos\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\frac{(n-1)\alpha+(n+1)\alpha_1}{2}\right] =$$
$$= 2^{n-2}n(n-1)\cos^{n-2}\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}$$

Aşa dar avem identitatea interesantă:

$$(37)\quad (n-1)C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+$$
$$\ldots+(n-1)C_n^1\sin(\alpha_1+(n-1)\alpha] =$$
$$2^{n-2}n(n-1)\cos^{n-2}\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\frac{n(\alpha+\alpha_1)}{2}$$

Dacă împărţim această identitate (37) prin (14), obţinem:

$$(38)\quad \frac{(n-1)C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+\ldots+(n-1)C_n^1\sin[\alpha_1+(n-1)\alpha]}{\sin n\alpha_1+C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+\ldots+\sin n\alpha} = \frac{n(n-1)}{4\cos^2\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}}$$

Numărătorul din primul membru, l'am obţinut derivând numitorul în raport cu α_1 şi apoi în raport cu α.

Caz particular. Pentru $n=3$ de exemplu, identitatea (38) simplificată cu 6, devine:

$$\frac{\sin(2\alpha_1+\alpha)+\sin(\alpha_1+2\alpha)}{\sin 3\alpha_1+3\sin(2\alpha_1+\alpha)+3\sin(\alpha_1+2\alpha)+\sin 3\alpha}=\frac{1}{4\cos^2\dfrac{\alpha-\alpha_1}{2}}$$

identitatea care se poate verifica şi direct.

Observare. Metoda aceasta de derivare aplicată unor identităţi trigonometrice cunoscute ne poate procura printr'o metodă simplă foarte multe alte identităţi, de aceea o recomandăm corespondenţilor noştri.

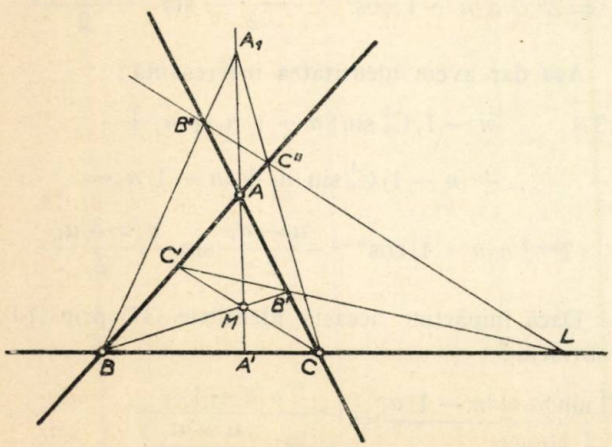
NOTE MATEMATICE

Observare. Nota matematică No. 14. din numurul trecut al *Revistei* este a d-lui *Teodor Marşieu* (Şc. Politechnică Timişoara).

16. — *Asupra problemei 937.* Problema d-lui *S.-Lt. A. Stan* rezolvată la pagina 69 vol. XI. este susceptibilă de generalizare în felul următor:

Fie A A′, B B′, C C′, *ceviene în triunghiul* ABC *şi* A_1 *un punct oare care pe* A A′. *Laturile* A B, A C *se întâlnesc cu* B A_1, C A_1 *în* B″, C″ *iar* B″ C″ *taie pe* B C *în* L. *Se construesc la fel punctele* P, Q *pe laturile* C A *şi* A B. *Punctele* L, P, Q *sunt în linie dreaptă.*

Demonstraţia se face foarte simplu fie cu ajutorul teoremelor asupra transversalelor fie cu ajutorul teoriei polarelor.



Considerând triunghiurile A A′ C, A A′ B, A B C tăiate succesiv de transversalele B B″ A_1, C C″ A_1, B″ C″ L şi aplicându-le teorema lui *Menelaus* avem:

$$(1)\qquad \frac{BC}{BA'}\cdot\frac{A_1A'}{A_1A}\cdot\frac{B''A}{B''C}=1$$

$$(2)\qquad \frac{CA'}{CB}\cdot\frac{C''B}{C''A}\cdot\frac{A_1A}{A_1A'}=1$$

$$(3)\qquad \frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C''A}{C''B}\cdot\frac{LB}{LC}=1$$

Inmulţind membru cu membru relaţiunile (1), (2), (3) şi făcând siuplificările necesare se găseşte:

$$(4)\qquad \frac{LB}{LC}\cdot\frac{CA'}{BA'}=1 \qquad \therefore \frac{LB}{LC}=\frac{A'B}{A'C}$$

Procedând la fel pentru punctele P şi Q se găseşte:

$$(5)\qquad \frac{PC}{PA}=\frac{B'C}{B'A};\qquad \frac{QA}{QB}=\frac{C'A}{C'B}$$

Se înmulţesc (4) cu (5), se ţine s amă de semnele segmentelor şi de faptul că A A′, B B′, C C′ sunt ceviene şi se găseşte:

$$\frac{LB}{LC}\cdot\frac{PC}{PA}\cdot\frac{QA}{QB}=1,$$

care arată că L, P, Q sunt coliniare.

Este interesant de observat că proprietatea este adevărată ori cum ar fi dispuse punctele A_1, B_1, C_1 pe ceviene. Explicaţia se deduce imediat dacă se observă că L, P, Q sunt polii acestor ceviene faţă de unghiurile triunghiului A B C.

In adevăr, din chiar construcţie se vede că L este polul lui A_1A' faţă de B A_1 C, deci diviziunea (B A′ C L) este armonică. Dacă L′ este intersecţia lui C′ B′ cu B C atunci L′ este polul lui A A′ faţă de ,B A C şi diviziunea (B A′ C L′) este de asemeni armonică. Cele 2 diviziuni având trei puncte comune sunt egale deci L′ şi L se confundă. Rezultă că L este polul lui A A′ faţă de B A C.

Proprietatea are şi o consecinţă reciprocă interesantă:

Fie L, P, Q *puncte colineare pe laturile unui triunghiu. Prin* L *se duce transversala* L C″ B″. *Fie* A_1 *intersecţia dreptelor* B B″, C C″. *Să se demonstreze că* A_1 *se mişcă pe o dreaptă fixă*

A_1A *şi că ea concură cu dreptele analog construite* B_1B, C_1C *plecând de la* P *şi* Q.

Demonstraţia e analoagă cu a problemei directe.

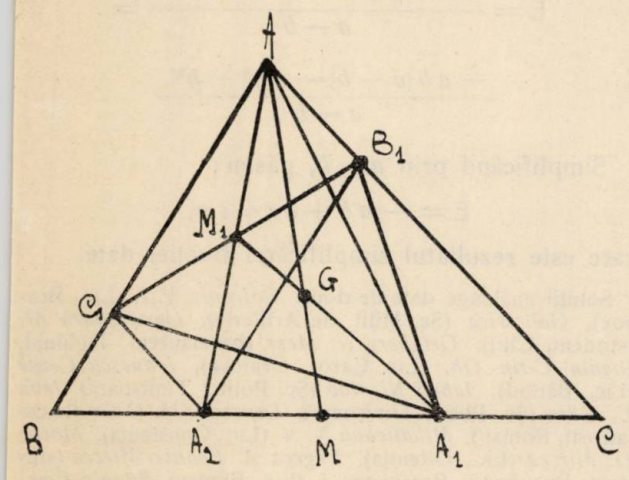
COL. GH. BUICLIU

17. — *Asupra reciprocii teoremei lui Pappus.* In „R. M. T." Vol. X. Nr. 5, d-l *Alexandru V. Niculescu* demonstrează reciproca teoremei lui *Pappus.*

„ *Dacă un triunghiu, înscris într'un triunghiu dat, are acelaş centru de greutate ca acest triunghiu, atunci vârfurile lui împart laturile triunghiului dat în acelaş sens, în acelaş raport.*

Voiu arăta o altă demonstraţie sprijinită continu pe cunoscuta proprietate:

„Punctul care împarte mediana în raportul $\frac{2}{1}$



e centrul de greutate al triunghiul respectiv.

Fie ABC triunghiul de referinţă având acelaş centru de greutate G cu triunghiul înscris $A_1B_1C_1$, M şi M_1 mijloacele laturilor BC şi B_1C_1, A_2 simetricul punctului A_1 în raport cu M.

Notez că, mediana A_1M_1 a triunghiului $A_1B_1C_1$ trece prin G şi e împărţită de G în raportul $\frac{2}{1}$

AM fiind mediană în triunghiul AA_2A_1 — G este centru de greutate şi pentru acest triunghiu — deci mediana vârfului A_1 a triunghiului AA_2A_1 trebue să fie împărţită de G în raportul $\frac{2}{1}$, încât după cele notate precedent, M_1 este mijloc pentru AA_2.

Concluzie: $A_2B_1AC_1$ e paralelogram, deci:

$$\frac{B_1A}{B_1C} = \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{C_1B}{C_1A}$$

şi cum:

$$MA_2 = MA_1$$

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{A_1C}{A_1B},$$

şi concluzia enunţului e verificată.

C-TIN IONESCU-BUJOR

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, an. XXXVI, No 12, August 1931. Cercles remarquables du triangle, par *V. Thébault.* Problema 2637 şi o variantă a ei, de *Col. Gh. Buiciu.* O problemă de geometrie infinitizemală, de *Lt. Mihail I. Focşăneanu.*

2. *Revista de Ciencias*, Ano XXXIV, Lima-Peru, Julio 1930 a Junio 1931. Metrica într'un spaţiu multiplu, *Dr. Ing. Godofredo Garcia.* Asupra problemei lui *Cauchy* pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de primul ordin, *Dr. Alfredo Rosenblat.* Dinamica punctului material, *Dr. Ing. Godofredo Garcia.*

3. *Boletin Matematico*, ano IV, Mayo 1931, Buenos Aires. Inginerul *Don Iosé S. Corti*, a 70-a aniversare. Provenienţa publicaţiei: *Boletin Matematico* de *B. I. Baidaff*

4. *Godofredo Garcia.* Ecuaţiuni cardinale. Ecuaţiunile universale complecte ale Dinamicei.

5. *Godofredo Garcia.* Téorema generalizată a accelaraţiei şi a mişcărei compuse.

PROBLEME REZOLVATE

915. — *Intr'un cerc* O *se înscriu două triunghiuri* ABC *şi* ADE, *unde* AE *este un diametru al cercului* O.

Ducând înălţimele BF *şi* DG, *să se arate că avem:*

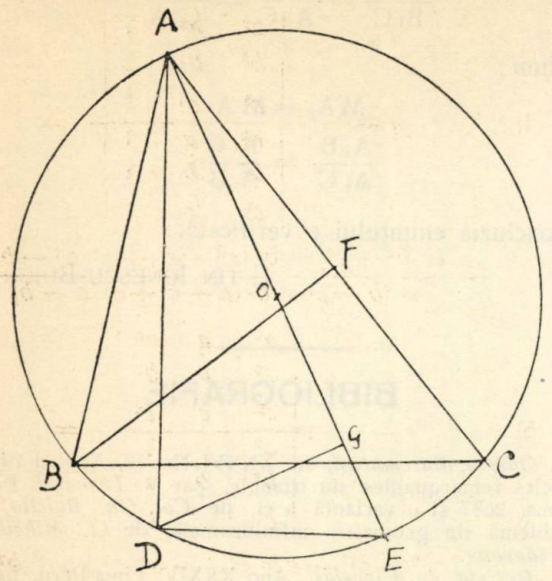
$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{DG}\cdot\overline{DE} = 2\,\overline{AD}\cdot\overline{OE}\cdot\overline{GE}\cdot\overline{BF}$$ [1]

TRAIAN MARINEANU

Ţinând seamă de teorema cunoscută: „*Produsul a două laturi dintr'un triunghiu, este egal cu produsul diametrului cercului circumscris, prin înălţimea corespunzătoare laturei a treia*", putem

[1]) Enunţ rectificat.

scri privind triunghiurile A B C şi A D E şi însemnând cu 2 R diametru:



$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}=2R.\overline{BF}$$

$$\overline{AD}\cdot\overline{DE}=2R.\overline{DG}$$

De aci deducem:

$$2R=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DE}}{\overline{DG}}$$

sau:

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{DG}=\overline{AD}.\overline{DE}\cdot\overline{BF}$$

Inmulţind cu $\overline{DE}$ ambii membrii, avem:

(1) $$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{DG}\cdot\overline{DE}=\overline{AD}\cdot\overline{DE}^2\cdot\overline{BF}$$

Dar în triunghiul dreptunghic A D E, avem:

$$\overline{DE}^2=\overline{AE}\cdot\overline{GE}=2\,\overline{OE}\cdot\overline{GE}$$

astfel că relaţia (1) devine:

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{DG}\cdot\overline{DE}=2\,\overline{AD}\cdot\overline{OE}\cdot\overline{GE}\cdot\overline{BF}$$

care este tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Dini I.* (Lic. Milit., Craiova), *Mehedinţi D.* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Purdilă A.* (Lic., Braşov) şi *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa).

982. — *Să se simplifice fracţia.*

$$\frac{a^2(b^3-c^3)-b^2(a^3-c^3)+c^2(a^3-b^3)}{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}$$

V. ALACI

Prima soluţie. Insemnând cu E fracţia dată, putem scri succesiv:

$$E=\frac{a^2b^3-a^2c^3-a^3b^2+b^2c^3+a^3c^2-b^3c^2}{a^2b-a^2c-ab^2+b^2c+ac^2-bc^2}=$$

$$\frac{b^3(a^2-c^2)+a^2c^2(a-c)-b^2(a^3-c^3)}{b(a^2-c^2)-ac(a-c)-b^2(a-c)}$$

Dacă dăm factor comun pe $a-c$, la numărător şi numitor şi apoi simplificăm, obţinem:

$$E=\frac{b^3(a+c)+a^2c^2-b^2(a^2+ac+c^2)}{ab+bc-ac-b^2}=$$

$$\frac{ab^2(b-c)+b^2c(b-c)-a^2(b^2-c^2)}{a(b-c)-b(b-c)}$$

Simplificând prin $b-c$, avem:

$$E=\frac{ab^2+b^2c-a^2b-a^2c}{a-b}=$$

$$\frac{-ab(a-b)-c(a^2-b^2)}{a-b}$$

Simplificând prin $a-b$, găsim:

$$E=-(ab+bc+ca)$$

care este rezultatul simplificării fracţiei date.

Soluţii analoage date de d-nii: *Cojocaru V. I.* (Lic., Braşov), *Gall Tica* (Şc. Milit. de Artilerie), *Gandrabura Al.* (student, Cluj), *Grinberg N. Meer* (bacalaureat, Tighina), *Ioanin C-tin Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Jahab Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Jeba C. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat, Roman), *Mihăileanu N. N* (Lic., Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Pănoiu Emanoil* (Lic. Carol, Craiova), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Popescu Ştefan* (Lic. Milit., Craiova), *Purdilă Anton* (Lic., Braşov) şi *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanţa).

Soluţia 2-a. Să considerăm fracţia:

$$E=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}}=\frac{E_1}{E_2}$$

Dacă desvoltăm determinanţii dela numărător şi numitor după elementele liniei a 2-a, observăm uşor că obţinem fracţia dată.

De altă parte avem şi dezvoltările:

$$E_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \\ a^3 & b^3 - a^3 & c^3 - a^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \\ b^3 - a^3 & c^3 - a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \times$$

$$\begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+c^2 \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(c^2 b + c^2 a - c b^2 - a b^2) =$$

$$(b-a)(c-a)[c b (c-b) + a (c^2 - b^2)] =$$

$$(b-a)(c-a)(c-b)(a b + b c + c a)$$

$$E_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$

E_2 fiind un determinant *Vandermonde*.

Rezultă astfel, că:

$$E = \frac{E_1}{E_2} = -(a b + b c + c a)$$

Soluții analoage date de d-nii: *Codreș Florian* (Șc. Milit. de Artilerie), *Marcu Aurel* (†), *Marșieu Teodor* (Șc Polit., Timișoara) și *Pop Leontin* (Șc. Polit., Timișoara).

Lămuriri date de autor. Am ajuns să formulez problema tratată, folosind cunostințI din teoria ecuațiilor.

Consider ecuația:

$$x^3 + p x^2 + q x + r = 0, \tag{1}$$

cu rădăcinele a, b, c. Aceste rădăcini satisfăcând ecuația, avem:

$$\begin{cases} a^3 + a^2 p + a q + r = 0 \\ b^3 + b^2 p + b q + r = 0 \\ c^3 + c^2 p + c q + r = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Acestea sunt relațiile la care trebuie să satisfacă p, q, r pentru ca a, b, c să fie rădăcinile ecuației (1). Rezolvind acest sistem liniar (2) în raport cu p, q, r, după reguta lui *Cramer*, avem:

$$p = -\frac{\begin{vmatrix} a^3 & a & 1 \\ b^3 & b & 1 \\ c^3 & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}} = \tag{3}$$

$$-\frac{a^3(b-c) - b^3(a-c) + c^3(a-b)}{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}$$

$$q = -\frac{\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}} = \tag{4}$$

$$-\frac{a^2(b^3 - c^3) - b^2(a^3 - c^3) + c^2(a^3 - b^3)}{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}$$

$$r = -\frac{\begin{vmatrix} a^2 & a & a^3 \\ b^2 & b & b^2 \\ c^2 & c & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}} = \tag{5}$$

$$-\frac{a^2 b c (c^2 - b^2) - a b^2 c (c^2 - a^2) + a b c^2 (b^2 - a^2)}{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}$$

Privind ecuația (1) ale cărei rădăcini sunt a, b, c și scriind relațiile dintre coeficienți și rădăcini, avem:

$$p = -(a+b+c), \qquad q = a b + b c + c a,$$
$$r = -a b c$$

In virtutea acestor relații, relațiile (3), (4) și (5) devin:

$$\frac{a^3(b-c) - b^3(a-c) + c^3(a-b)}{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)} = a+b+c \tag{6}$$

$$\frac{a^2(b^3 - c^3) - b^2(a^3 - c^3) - c^2(a^2 - b^3)}{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)} =$$

$$-(a b + b c + c a) \tag{7}$$

$$\frac{a^2 b c (c^2 - b^2) - a b^2 c (c^2 - a^2) + a b c^2 (b^2 - a^2)}{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)} = \tag{8}$$

$$a b c$$

Fracțiunea din relația (7) este tocmai aceea din enunțul problemei propuse, iar membrul al 2-lea este tocmai rezultatul după simplificare.

983 — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^5) = 1157 \\ (x-y)(x^2-y^2) = 117 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Dezvoltând avem:

$$\begin{cases} x^3+x^2y+xy^2+y^3=1157 \\ x^3-x^2y-xy^2+y^3=117 \end{cases}$$

Prin adunare şi scădere, după ce simplificăm cu 2, obţinem:

$$\begin{cases} x^3+y^3=637 \\ xy(x+y)=520 \end{cases}$$

Prima ecuaţie, ţinând seamă de a 2-a devine:

$$(x+y)^3-3\times 520=637$$

$$\therefore\ x+y=\sqrt[3]{2197}=13\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$(k=0,1,2)$$

Ţinând seamă de această ecuaţie, a 2-a ecuaţie a sistemului dat, care se mai poate scri:

$$(x-y)^2(x+y)=117$$

devine:

$$(x-y)^2=\frac{117}{13\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)}=$$

$$9\left(\cos\frac{2k\pi}{3}-i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\quad x-y=\pm 3\left(\cos\frac{k\pi}{3}-i\sin\frac{k\pi}{3}\right)$$

Sistemul dat este deci echivalent cu unul din sistemele:

$$(1)\quad \begin{cases} x+y=13\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right) \\ x-y=\pm 3\left(\cos\frac{k\pi}{3}-i\sin\frac{k\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$(k=0,1,2)$$

1°. Pentru $k=0$, avem:

$$\begin{cases} x+y=13 \\ x-y=\pm 3, \end{cases}$$

ceeace ce ne dă sistemele de soluţii:

$$(2)\quad \begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=8 \end{cases}$$

2°. Pentru $k=1$, sistemul (1), devine:

$$\begin{cases} x+y=-\frac{13}{2}(1-i\sqrt{3}) \\ x-y=\pm\frac{3}{2}(1-i\sqrt{3}) \end{cases}$$

De aci deducem sistemele de soluţii:

$$(3)\quad \begin{cases} x=\frac{5}{2}(i\sqrt{3}-1) \\ y=4(i\sqrt{3}-1) \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x=4(i\sqrt{3}-1) \\ y=\frac{5}{2}(i\sqrt{3}-1) \end{cases}$$

3°. Pentru $k=2$, sistemul (1), devine:

$$\begin{cases} x+y=-\frac{13}{2}(1+i\sqrt{3}) \\ x-y=\pm\frac{3}{2}(1-i\sqrt{3}) \end{cases}$$

De aci deducem sistemele de soluţii:

$$(4)\quad \begin{cases} x=-\left(4+\frac{5}{2}i\sqrt{3}\right) \\ y=-\left(\frac{5}{2}+4i\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x=-\left(\frac{5}{2}+4i\sqrt{3}\right) \\ y=-\left(4+\frac{5}{2}i\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

In (2), (3) şi (4) avem cele 6 sisteme de soluţii, pentru sistemul propus.

Au găsit 6 sisteme de soluţii, d-nii: *Băcicov Boris* (Tighina), *Jahab Nicolae* (Şc Polit., Timişoara), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Pop Leontin* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu C. Ştefan* (Lic. Milit, Craiova), *Purdilă Anton* (Braşov), *Stan Ioan* (Lic., Roman), *Ştefănescu Anibal* (bacalaureat, Bucureşti) şi *Zamfirescu Gh. I.* (Sub-Lt., Piteşti).

Au găsit numai sistemele de soluţii reale (2), d-nii: *Astelean Valeriu* (Lic., Cluj), *Bâcicov Victor* (student, Iaşi), *Bojan Andrei* (Lic., Cluj), *Codreş Florian* (Şc. Milit. de Artilerie), *Cojocaru V. I.*, *Constantinescu Mircea* (Bucureşti), *Cristescu I.* (Sub-Lt.), *Dumitrascu N. Romeo* (Lic, Roman), *Felecean Simion*, *Filipovici I.* (Bucureşti), *Gall Tica* (Şc. Milit. de Artilerie) *Gardrabura Al.* (student, Cluj), *Goldner Sylvian* (bacalaureat, Bucureşti), *Grinberg N. Meer* (Tighina), *Ioanin C. Gh.* (Lic., Craiova), *Ilie C. Ioan* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ionescu P. Haralamb* (student), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Manasiu D-tru*, *Marcu Aurel (†)*, *Marşieu Teodor* (Şc, Polit., Timişoara), *Mehedinţi D.* (Lic. Milit., Tg.-Mu-

reş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Millea G. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Motoc D. Mircea* (Lic,, Oltenita), *Neuländer Artur* (Lic., Cluj), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Oprea Beniamin* (Lic, Petroşani), *Parepeanu I.* (Lic, Braşov), *Pănoiu Emanoil* (Lic., Carol, Craiova), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Pop Gheorghe* (Lic., Cluj), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Popa N.* (Lic., Constanţa), *Popescu I. Iosif* (Lic., Petroşani), *Roth Martin* (Lic., Cluj), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Sâmbotin Gheorghe*, *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Tăutu Ştefan* (Lic., Roman), *Vonica C. Ion* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanţa).

Observări. 1. D-l *Mihăileanu* (Lic., Constanţa) a generalizat sistemul dat, luând *a* şi *b* pentru membrii al 2-lea.

2. D-nii *Boerescu G.* şi *Mihăileanu N.* au observat că sistemul dat este analog cu sistemul din F. G. M., No. 849, dar soluţia dată de autor este diferită.

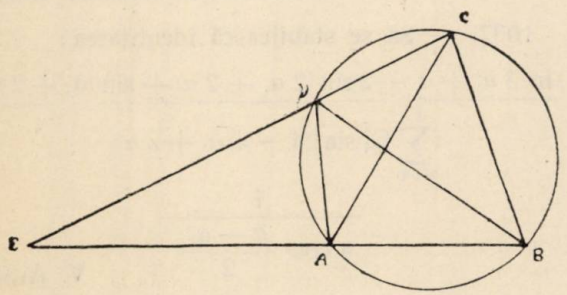
985. — *Fie patrulaterul inscriptibil* A B C D, *în care* A C *şi* B D *sunt diagonale şi* E *intersecţia laturilor* A B, C D.

Să se demonstreze că avem:

$$\overline{DA}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{EC}=\overline{CA}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{ED}$$

SUB-LT. AURELIAN STAN

Consruim figura din enunţ.



Triunghiurile A D E şi B C E sunt asemenea, având: $\widehat{E}$ comun, $\widehat{EDA}=\widehat{EBC}$, pentru că au aceiaşi măsură.

Rezultă din asemânarea triunghiurilor A D E şi B C E:

$$(1)\qquad \frac{\overline{DA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{EB}}$$

Apoi din triunghiurile asemenea C A E şi B D E, deducem:

$$(2)\qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$$

Inmulţind relaţiile (1) şi (2), obţinem:

$$\frac{\overline{DA}\cdot\overline{DB}}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}}$$

sau:

$$\overline{DA}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{EC}=\overline{CA}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{ED},$$

care este tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Băcicov Boris* (student), *Băcicov Victor* (student), *Boerescu Gheorghe* (Lic., Oltenita), *Cojocaru V. Ioan*, *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Cristescu I.* (Sub.-Lt), *Dini Ioan* (Lic. Milit., Craiova), *Gall Tica* (Şc. Milit. de Artiierie), *Gheorghe Valeriu* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ilie C. Ioan* (Lic.,- Milit., Tg.-Mureş), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad) *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Mehedinţi D-tru* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Millea G. Ene* (Şc. Milit. de Artilerie), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Păsculescu M. Vasile* (bacalaureat), *Păunescu N.* (Lic. Milit., Craiova), *Popa N.* (Lic., Constanţa), *Popescu C. Ştefan* (Lic. Milit., Craiova), *Purdilă A.* (Braşov), *Rusu D. C-tin* (Constanţa), *Sâmbotin Gh.*, *Vonica C. Ioan* (Şc. Milit de Artilerie) şi *Zamfirescu Gh. I.* (Sub.-Lt, Piteşti).

986. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin^4 x\,(1+\sin^2 x)+\cos^4 x\,(1+\cos^2 x)=1$$

SUB-LT. C-TIN V. COSTACHESCU

Ecuaţia dată se mai poate scri:

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^6 x+\cos^6 x=1,$$

sau:

$$(1)\qquad (\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x+$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\,(\sin^2 x+\cos^2 x)=1$$

Ţinând seamă că:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

ecuatia (1) devine:

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x+1-3\sin^2 x\cos^2 x=1$$

$$\therefore\qquad 5\sin^2 x\cos^2 x=1$$

sau încă:

$$\sin^2 2x=\frac{4}{5},$$

de unde deducem:

$$(2)\qquad \sin 2x=\frac{2}{\sqrt{5}},\qquad (3)\qquad \sin 2x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Aplicând în ecuaţia (2) logaritmii, avem:

$$\lg\sin 2x=\lg 2-\frac{\lg 5}{2}=0.30103-0.34948=$$

$$0.30103 + \overline{1},65052 = \overline{1},95155$$

$$\therefore \quad 2x = 2k\pi + 63^0,26'.10''$$

sau:

$$2x = (2k+1)\pi - 63^0,26',10''$$

deci:

$$(4) \quad \begin{cases} x = k\pi + 31^0,43',5'' \\ x = (2k+1)\frac{\pi}{2} - 31^0,43',5'' \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ecuaţia (3) ne dă încă:

$$(5) \quad \begin{cases} x = k\pi - 31^0,43',5'' \\ x = (2k+1)\frac{\pi}{2} + 31^0,43',5'' \end{cases}$$

Astfel solutiile ecuaţiei date se pot scri:

$$\begin{cases} x = k\pi \pm 31^0,43',5'' \\ x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \pm 31^0,43'\,5'' \end{cases}$$

Soluţii date de d-nii: *Cojocaru V. I.*, *Constantinescu Mircea* (Bucureşti), *Curchi Ioan* (bacalaureat, Chişinău), *Grinberg Meer* (bacalaureat, Tighina), *Ioanin C. Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marcu Aurel (†) Marşieu Teodor* (Şc. Polit, Timişoara), *Mereuţă Emllian* (student, Bucureşti), *Mihaileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Parepeanu I.* (Braşov), *Pănoiu Emanoil* (Lic, Carol, Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Popa N.* (Lic., Constanţa), *Purdilă Anton* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Tăutu Ştefan* (Lic., Roman), *Vonica C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Weissmann Mauriciu* (Lic.. Constanţa).

PROBLEME PROPUSE

1031. — Să se arate că expresia:

$$3^{3n+2} + 2^{n+4},$$

este divizibilă cu 25 oricare ar fi valoarea lui n.

SUB.-LT ION C. VONICA

1032. — Se cer patratele perfecte de patru cifre care sunt în acelaşi timp şi cuburi perfecte.

EMILIAN MEREUTA

1033. — Să se rezolve ecuaţia:

$$x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0$$

COL. GH. BUICLIU

1034. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ xyz = x + y + z \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 49 \end{cases}$$

CEZAR IVANESCU

1035. — Se consideră un triunghiu oarecare circumscris unui cerc cu centrul în O. O tangentă oarecare la cercul O tae laturile B C, C A, A B respectiv în α, β, γ.

Perpendicularele în O pe dreptele $O\alpha, O\beta, O\gamma$ tae tangenta considerată în α_1, β_1, γ_1. Să se arate că dreptele $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ sunt paralele.

CEZAR COSNITA

1036. — In triunghiul A B C, prin picioarele cevienelor perpendiculare pe dreapta care uneşte centrul cercului circumscris cu ortocentrul, se duc paralele D_a, D_b, D_c cu laturile corespunzătoare ale triunghiului ortic. Cercurile circumscrise triunghiurilor $(D_a, A B, A C), (D_b, B C, B A), (D_c, C A, C B)$ sunt concentrice şi au centrul în ortocentrul triunghiului A B C.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

1037. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{\sin(3\alpha_1 + \alpha) + 2\sin(2\alpha_1 + 2\alpha) + \sin(\alpha_1 + 3\alpha)}{\sum_{\lambda=0}^{4} C_4^{\lambda} \sin[(4-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha]} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha - \alpha_1}{2}}$$

V. ALACI

1038. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$\sum \frac{a^2 \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sum \frac{a^2 \cos B \cos C}{\sin A}$$

Să se deducă de aci, că între unghiurile unui triunghiu, avem relaţia:

$$16\cos A \sin\frac{A}{2}\cos B \sin\frac{B}{2}\cos C \sin\frac{C}{2} \sum \sin A = \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

N. MIHAILEANU

Erată. In problema 971 a d-lui *A. Coman* rândul 4 trebuie complectat astfel:

$$MP = MP' = AN.$$

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek,* Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann,* La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale,* Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez,* Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell,* Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff,* Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera,* S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky,* Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler.* Washington (Statele Unite). *J. Shohat,* Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville,* Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault,* Le Mans (Francia), *O. Szász,* Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti,* Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XI. 15 OCTOMVRIE 1931 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 CEZAR COSNITA CATEVA PROPRIETATI ALE UNOR TRIUNGHIURI OMOLOGICE
2. NOTE MATEMATICE: 18, 19,
3 EXAMEN DE INTRARE IN ANUL PREPARATOR
4. BIBLIOGRAFIE
5. PROBLEME REZOLVATE: 977, 987, 988, 990, 991, 995, 999
6. PROBLEME PROPUSE: 1039-1046
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de artegrafice „Tipografia Românească“

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adr e sate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei.

ANUL XI—NO. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMVRIE 1931

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

CATEVA PROPRIETAŢI ALE UNOR TRIUNGHIURI OMOLOGICE

de CEZAR COSNITA

Fie un triunghiu oarecare ABC, iar $A'B'C'$ un triunghiu înscris în ABC şi omologic cu acesta, centrul de omologie fiind în ω.

I. *Paralelele duse prin* ω *la laturile* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *tae pe* BC, CA, AB *respectiv în* α', β', γ'. *Punctele* α', β', γ' *sunt colineare.*

II. *Paralelele duse prin* ω *la laturile* BC, CA, AB *tae pe* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *respectiv în* α_1, β_1, γ_1. *Punctele* α_1, β_1, γ_1 *sunt colineare.*

III. *Fie* α, β, γ *punctele în care* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *tae respectiv pe* BC, CA, AB. *Dreptele:* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *sunt paralele.*

Soluţiune: In perechile de triunghiuri asemenea: $(\alpha B B'\ \alpha' B\,\omega)$, $(\alpha C C',\ \alpha' C\,\omega)$ avem relaţiile:

$$\frac{\alpha' B}{\alpha B} = \frac{\omega B}{B' B}, \qquad \frac{\alpha' C}{\alpha C} = \frac{\omega C}{C' C},$$

cari împărţite ne dau:

$$\frac{\alpha' B}{\alpha' C} = \frac{\omega B}{\omega C} \cdot \frac{C' C}{B' B} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C}.$$

In acelaş mod găsim relaţiunile următoare:

$$\frac{\beta' C}{\beta' A} = \frac{\omega C}{\omega A} \cdot \frac{A' A}{C' C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A}, \quad \frac{\gamma' A}{\gamma' B} = \frac{\omega A}{\omega B} \cdot \frac{B' B}{A' A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B}$$

Inmulţind aceste trei grupuri de relaţii şi ţinând seamă că:

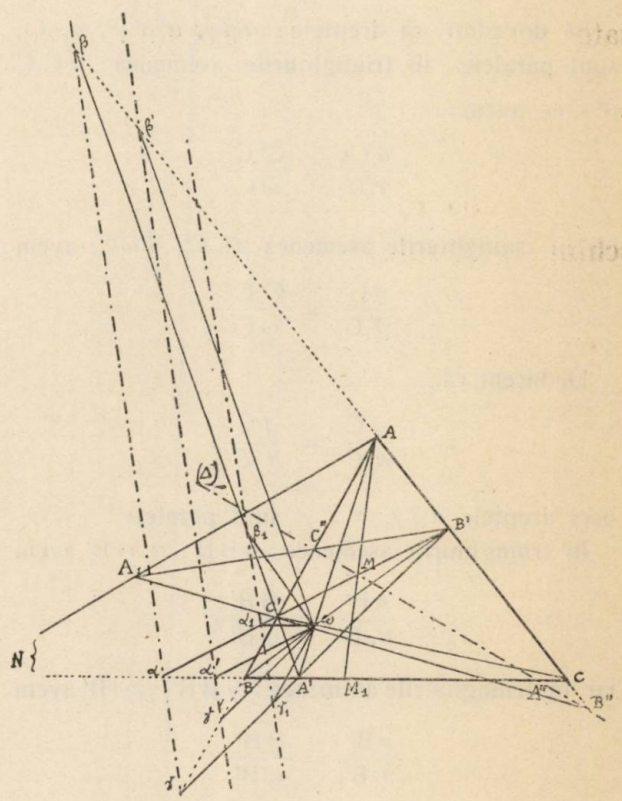
$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = +1,$$

conchidem:

$$\frac{\alpha' B}{\alpha' C} \cdot \frac{\beta' C}{\beta' A} \cdot \frac{\gamma' A}{\gamma' B} = +1$$

Deci punctele α', β', γ' sunt colineare.
In perechile de triunghiuri asemenea:

$$(\alpha B B',\ \alpha_1 \omega B'),\ (\alpha C C',\ \alpha_1 \omega C'),$$



avem relaţiile următoare:

$$\frac{\alpha_1 B'}{\alpha B'} = \frac{\omega B'}{B B'}, \qquad \frac{\alpha_1 C'}{\omega C'} = \frac{\omega C'}{C C'}.$$

Prin împărţire deducem relaţia:

$$\frac{\alpha_1 B'}{\alpha_1 C'} = \frac{\omega B'}{\omega C'} \cdot \frac{C C'}{B B'} \cdot \frac{\alpha B'}{\alpha C'}.$$

Pe aceaşi cale găsim relaţiile:

$$\frac{\beta_1 C'}{\beta_1 A'} = \frac{\omega C'}{\omega A'} \cdot \frac{A A'}{C C'} \cdot \frac{\beta C'}{\beta A'},$$

$$\frac{\gamma_1 A'}{\gamma_1 B'} = \frac{\omega A'}{\omega B'} \cdot \frac{B B'}{A A'} \cdot \frac{\gamma A'}{\gamma B'}.$$

Inmulțind, avem:

$$\frac{\alpha_1 B'}{\alpha_1 C'} \cdot \frac{\beta_1 C'}{\beta_1 A'} \cdot \frac{\gamma_1 A'}{\gamma_1 B'} = +1,$$

fiindcă:

$$\frac{\alpha B'}{\alpha C'} \cdot \frac{\beta C'}{\beta A'} \cdot \frac{\gamma A'}{\gamma B'} = +1.$$

Deci și punctele α_1, β_1, γ_1 sunt colineare.

Să dovedim că dreptele: $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ sunt paralele. In triunghiurile asemenea: $\alpha C C'$, $\alpha' C \omega$, avem:

$$\frac{\alpha C}{\alpha' C} = \frac{C' C}{\omega C},$$

iar în triunghiurile asemenea $\beta C C'$, $\beta' \omega C$, avem:

$$\frac{\beta C}{\beta' C} = \frac{C' C}{\omega C}.$$

Deducem că:

$$\frac{\alpha C}{\alpha' C} = \frac{\beta C}{\beta' C},$$

deci dreptele $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt paralele.

In triunghiurile asemenea: $\alpha B B'$, $\alpha_1 \omega B'$ avem:

$$\frac{\alpha B'}{\alpha_1 B'} = \frac{B B'}{\omega B'},$$

iar în triunghiurile asemenea: $\gamma B B'$, $\gamma_1 \omega B'$ avem:

$$\frac{\gamma B'}{\gamma_1 B'} = \frac{B B'}{\omega B'}.$$

Rezultă:

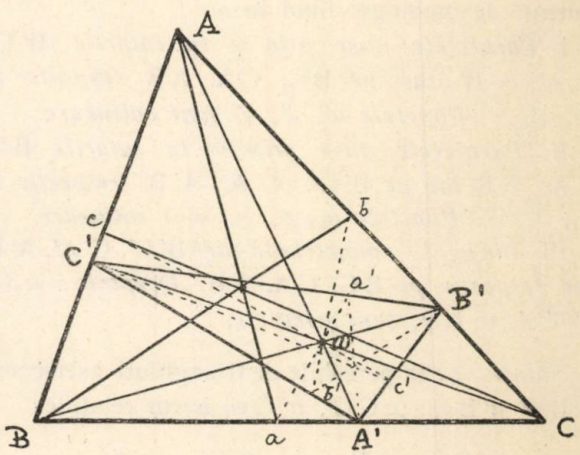
$$\frac{\alpha B'}{\alpha_1 B'} = \frac{\gamma B'}{\gamma_1 B'},$$

deci dreptele $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ sunt paralele. In rezumat, cele 3 drepte: $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ sunt paralele.

IV. *Fie* A B C *un triunghiu oarecare*, A' B' C' *înscris în* A B C *și omologic cu* A B C, *centrul de omologie în* ω. *Fie* a', b', c' *picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare în triunghiul* A' B' C' *Dreptele* $\omega a'$, $\omega b'$, $\omega c'$ *tae pe* B C, C A, A B *în* a, b, c. *Punctele* a, b, c *sunt picioarele a 3 ceviene sau sunt 3 puncte colineare în triunghiul* A B C, *după cum* a', b', c' *erau picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare în triunghiul* A' B' C'.

Invers: *Fie* a, b, c *picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare în triunghiul* A B C. *Dreptele* ωa, ωb, ωc *tae pe* B' C', C' A', A' B' *respectiv în* a', b', c'. *Punctele* a', b', c', *sunt piciarele a 3 ceviene sau 3 puncte coliniare în triunghiul* A' B' C' *dupăcum* a, b, c *erau picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare in triunghiul* A B C.

Soluțiune: In triunghiurile: $a\omega$ B, $a\omega$ C, avem:



$$\frac{a B}{\sin \widehat{a\omega B}} = \frac{\omega B}{\sin \widehat{a}}, \quad \frac{a C}{\sin \widehat{a\omega C}} = \frac{\omega C}{\sin \widehat{a}}.$$

Impărțind, deducem:

$$(1) \qquad \frac{a B}{a C} = \frac{\omega B}{\omega C} \cdot \frac{\sin \widehat{a\omega B}}{\sin \widehat{a\omega C}}.$$

In triunghiurile: $a'\omega B'$, $a'\omega C'$, avem:

$$\frac{\sin \widehat{a\omega B}}{a' B'} = \frac{\sin \widehat{a}}{\omega B'}, \quad \frac{\sin \widehat{a\omega C}}{a' C'} = \frac{\sin \widehat{a}}{\omega C'},$$

și împărțind avem:

$$\frac{\sin \widehat{a\omega B}}{\sin \widehat{a\omega C}} = \frac{\omega C'}{\omega B'} \cdot \frac{a' B'}{a' C'}.$$

Relaţia (1) se mai scrie:

$$\frac{aB}{aC} = \frac{\omega B}{\omega C} \cdot \frac{\omega C'}{\omega B'} \cdot \frac{a'B'}{a'C'}.$$

In mod analog ajungem la relaţiile următoare:

$$\frac{bC}{bA} = \frac{\omega C}{\omega A} \cdot \frac{\omega A'}{\omega C'} \cdot \frac{b'C'}{b'A'},$$

$$\frac{cA}{cB} = \frac{\omega A}{\omega B} \cdot \frac{\omega B'}{\omega A'} \cdot \frac{c'A'}{c'B'}.$$

Prin înmulţirea acestor 3 relaţii, deducem:

$$(2) \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = \frac{a'B'}{a'C'} \cdot \frac{b'C'}{b'A'} \cdot \frac{c'A'}{c'B'}$$

Cum a', b', c' sunt picioarele a 3 ceviene sau sunt 3 puncte colineare în triunghiul $A'B'C'$, avem:

$$\frac{a'B'}{a'C'} \cdot \frac{b'C'}{b'B'} \cdot \frac{c'A'}{c'B'} = \mp 1,$$

Relaţia (2) ne spune atunci că a, b, c sunt picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare în triunghiul ABC.

Invers: Dacă a, b, c sunt picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare în triunghiul ABC, avem:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = \mp 1,$$

iar relaţia (2) ne spune că a', b', c' sunt picioarele a 3 ceviene sau sunt 3 puncte colineare pe laturile lui $A'B'C'$.

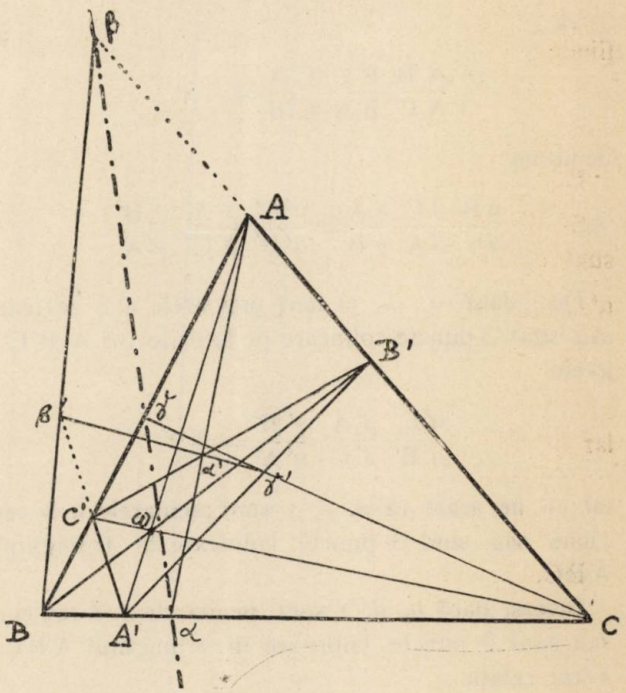
V. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare,* $A'B'C'$ *înscris în* ABC *şi omologic cu el, centrul de omologie în* ω. *Fie* α', β', γ' *picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare pe laturile lui* $A'B'C'$. *Dreptele* $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ *sunt concurente sau tae laturile lui* BC, CA, AB *în 3 puncte colineare.*

Invers: *Fie* α, β, γ *picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare pe laturile lui* ABC. *Dreptele* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, taie *pe* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *în* α', β', γ'.

Punctele α', β', γ' *sunt picioarele a 3 ceviene sau sunt 3 puncte colineare pe laturile lui* $A'B'C'$.

Soluţiune: Observăm figura 3. Fie α', β', γ' 3 puncte pe laturile lui $A'B'C'$ — picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare (In cazul figurei, cele 3 puncte sunt colineare). Dreptele $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ tae pe BC, CA, AB în α, β, γ cari sunt picioarele a 3 ceviene sau 3 puncte colineare. In adevăr, în triunghiurile: αAB, αAC, avem:

$$\frac{\alpha B}{\sin \widehat{\alpha AB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{\alpha}}, \qquad \frac{\alpha C}{\sin \widehat{\alpha AC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{\alpha}}$$



Impărţind aceste relaţii, avem:

$$(3) \qquad \frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{\alpha AB}}{\sin \widehat{\alpha AC}}.$$

In triunghiurile: $\alpha' AC'$, $\alpha' AB'$, avem:

$$\frac{\sin \widehat{\alpha AB}}{\alpha' C'} = \frac{\sin \widehat{\alpha'}}{C'A}, \qquad \frac{\sin \widehat{\alpha AC}}{\alpha' B'} = \frac{\sin \widehat{\alpha'}}{B'A}$$

Prin împărţire deducem:

$$\frac{\sin \widehat{\alpha AB}}{\sin \widehat{\alpha AC}} = \frac{B'A}{C'A} \cdot \frac{\alpha' C'}{\alpha' B'},$$

iar (3) devine:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{B'A}{C'A} \cdot \frac{\alpha' C'}{\alpha' B'}$$

In acelaş mod găsim relaţiunile următoare.

$$\frac{\beta C}{\beta A} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{C'B}{A'B} \cdot \frac{\beta' A'}{\beta' C'}$$

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{A'C}{B'C} \cdot \frac{\gamma' B'}{\gamma' A'}.$$

Inmulţind aceste 3 relaţii şi observând că:

$$AC = -CA,\ BA = -AB,\ CB = -BC$$

şi că:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1,$$

deducem:

$$(4) \qquad \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} \cdot \frac{\beta' A'}{\beta' C'} \cdot \frac{\gamma' B'}{\gamma' A'}.$$

Deci dacă α', β', γ' sunt picioarele a 3 ceviene sau sunt 3 puncte colineare pe laturile lui $A'B'C'$, avem:

$$\frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} \cdot \frac{\beta' A'}{\beta' C'} \cdot \frac{\gamma' B'}{\gamma' A'} = \mp 1,$$

iar (4) ne arată că α, β, γ sunt picioarele a 3 ceviene sau sunt 3 puncte colineare în triunghiul ABC.

Invers, dacă α, β, γ sunt picioarele a 3 ceviene sau sunt 3 puncte colineare în triunghiul ABC, avem relaţia:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \mp 1$$

iar (4) ne arată că α', β', γ' sunt picioarele a 3 ceviene sau sunt 3 puncte colineare în triunghiul $A'B'C'$.

* * *

Proprietăţile demonstrate mai sus sunt destul de generale şi particularizându-le putem obtine o mulţime de proprietăţi cunoscute sau noi ale triunghiului. Voi da mai jos 3 aplicaţiuni interesante ale acestor proprietăţi.

1°. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare* $A'B'C'$ *înscris în* ABC *şi omologic cu el, centrul de omologie în* ω. *Să se demonstreze că:*

a) Tangentele în ω *la cercurile* $B\omega C$, $C\omega A$, $A\omega B$ *tae pe* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, *în 3 puncte colineare.*

b) Tangentele în ω *la cercurile* $B'\omega C'$, $C'\omega A'$, $A'\omega B'$ *tae pe* BC, CA, AB *în 3 puncte colineare.*

Soluţiune: Proprietăţile precedente sunt o consecinţă imediată a proprietăţilor demonstrate la punctul (IV). In adevăr se ştie că tangentele în ω la cercurile $B\omega C$, $C\omega A$, $A\omega B$, tae pe BC, CA, AB în 3 puncte colineare, iar tangentele în ω la cercurile $B'\omega C'$, $C'\omega A'$, $A'\omega B'$ tae pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ tot în 3 puncte colineare. Aceste lucruri amintite, proprietăţile dela (1°) devin evidente în virtutea proprietăţilor (IV).

2°. *Fie* ω *un punct în planul triunghiului* ABC, *fie* A', B', C' *punctele în cari dreptele* $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$ *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *şi fie* A'', B'', C'' *punctele în cari aceste laturi sunt întâlnite de o dreaptă* (Δ). *Se consideră punctele:* $A_1(B'C'', B''C')$, $B_1(C'A'', A'C'')$, $C_1(A'B'', B'A'')$. *Să se arate că dreptele* AA_1, BB_1, CC_1 *sunt concurente.*

(N. G. Botea)
(R. M. T., vol. VI, pag. 14)

Soluţiune: Ne folosim de prima figură. Notăm cu M punctul unde (Δ) tae pe $B'C'$, cu M_1 intersecţia (BC, AM), cu N intersecţia (AA_1, BC). Se vede pe figură că AM este polara lui A_1 faţă cu unghiul BAC, deci AA_1, AM sunt conjugate armonic faţă de acest unghiu. Rezultă că N, M_1 sunt conjugate armonic faţă cu B, C. Dar punctul M şi analoagele sunt 3 puncte colineare pe laturile lui $A'B'C'$, deci după proprietatea (V) M_1 şi analoagele sale sunt 3 puncte colineare pe laturile lui ABC. Rezultă atunci că N şi analoagele, fiind conjugatele armonice a 3 puncte colineare, în raport cu vârfurile triunghiului, sunt picioarele a 3 ceviene, adică dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

3°. *Să se arate că ortocentrul unui triunghiu se bucură de următoarele proprietăţi:*

a) Paralele duse prin el la bisectoare întâlnesc laturile triunghiului în 3 puncte ce sunt picioarele a 3 ceviene concurente.

b) Perpendicularele duse prin el la bisectoare întâlnesc laturile triunghiului în 3 punte colineare.

c) Antiparalele la laturile triunghiului duse

prin el întâlnesc laturile triunghiului În 3 puncte colineare.

(N. G. Botea)

(R. M. T., vol. VI, pag. 78)

Soluțiune: Insemnăm cu A B C triunghiul dat, A′ B′ C′ triunghiul său ortic, H ortocentrul și α', β', γ' punctele în cari paralele duse prin H la bisectoare tae pe B′ C′, C′ A′, A′ B′. Se vede imediat că H α' e bisectoarea unghiului B′ H C′, deci, după o proprietate cunoscută, avem:

$$\frac{\alpha' B'}{\alpha' C'} = \frac{H B'}{H C'};$$

la fel:

$$\frac{\beta' C'}{\beta' A'} = \frac{H C'}{H A'}, \qquad \frac{\gamma' A'}{\gamma' B'} = \frac{H A'}{H B'}.$$

Deci:

$$\frac{\alpha' B'}{\alpha' C'} \cdot \frac{\beta' C'}{\beta' A'} \cdot \frac{\gamma' A'}{\gamma' B'} = -1,$$

adică α', β', γ' sunt picioarele a 3 ceviene în triunghiul A′ B′ C′ și atunci, conform proprietății (IV) rezultă că punctele α, β, γ unde H α', H β', H γ' tae pe B C, C A, A B sunt picioarele a 3 ceviene în triunghiul A B C.

Fie $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ punctele unde perpendicularele în H pe H α, H β, H γ (deci pe bisectoarea lui A B C) tae pe B C, C B, A B. Se vede că H α_1, H β_1, H γ_1 sunt bisectoarele exterioare ale unghiurilor: B H C, C H A, A H B, deci $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sunt conjugate armonic cu α, β, γ respectiv în raport cu: (B, C), (C, A), (A, B). Cum α, β, γ sunt picioarele a 3 ceviene în triunghiul A B C, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sunt colineare.

Antiparalele duse prin H la B C, C A, A B sunt paralele respectiv cu B′ C′, C′ A′, A′ B′ (cum se vede ușor), deci, conform proprietății (I), ele tae pe B C, C A, A B în 3 puncte colineare.

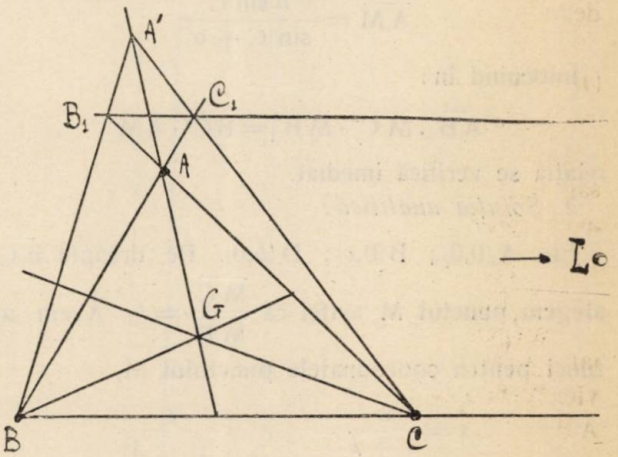
NOTE MATEMATICE

18. — *Asupra problemei 937 R. M. T., Vol. XI, pag. 69.*

Vom da o altă soluție și o generalizare acestei probleme.

Considerăm triunghiul A B C, G centrul său de greutate și punctele A′, B′, C′ respectiv pe A G, B G, C G. Dreptele A′ B, A′ C tae laturile A C, A B în B_1, C_1. Dreptele $B_1 C_1$, B C se întâlnesc într'un punct L pe dreapta dela infinit, deoarece într'un patrulater complet o diagonală e împărțită armonic de celelalte două și cum în patrulaterul A′ B_1 B A C C_1 diagonala A A_1 trece grin mijlocul diagonalei B C, $B_1 C_1$ va întâlni pe B C la infinit.

Punctele analoage M, N sunt tot pe dreapta dela infinit, adică pe polara trilineară a centrului de greutate G. Acestea sunt adevărate ori cari ar fi A′, B′, C′ pe A G, B G, C G.



a) Dacă A′, B′, C′ sunt însă pe o aceași dreaptă Δ și proectăm conic figura precedentă pe un plan așa fel ca Δ să devină dreapta dela infinit a acestui plan, G devine un punct oarecare D în noul triunghiu A B C, B B_1 și C C_1 devin paralele cu A D, etc. colinearitatea punctelor L, M, N se păstrează în proecție, iar L M N continuă să fie în proecție polara trileneară a punctului D. Această e problema 937.

b) Dacă A′, B′, C′ sunt oarecari pe A G, B G, C G și proectăm conic pe un plan oarecare, G devine un punct oarecare P în noul triunghiu A B C și avem generalizarea următoare a problemei 937.

„Considerăm un triunghiu A B C, *un punct* P *în planul său și punctele* A′, B′, C′ *respectiv pe* A P, B P, C P. *Dreptele* A′ B, A′ C *întâlnesc* A C, A B în B_1, C_1. L *fiind intersecția dreptelor* $B_1 C_1$, B C *și* M, N *punctele analoage* L, M, N *sunt pe polara trilineară a punctului* P.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

19. — *Asupra unei relaţii Van Aubel.*

Acestei relaţii i s'au dat în cuprinsul *Revistei Matematice*, 5 demonstraţii diferite.

Voi indica încă un metod de soluţionare a problemeii.

1. *Soluţie trigonometrică.* Fie α unghiul format de direcţia $\overline{AM}$ cu una din catete de exemplu A C.

Notând $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, şi $\overline{BC}=a$, avem:

$$\overline{MC}=\frac{b\sin\alpha}{\sin(C+\alpha)}, \qquad \overline{MB}=\frac{c\cos\alpha}{\sin(C+\alpha)},$$

$$\overline{AM}=\frac{b\sin C}{\sin(C+\alpha)}$$

Inlocuind în:

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{MC}^2\cdot\overline{MB}^2|=\overline{BC}^2\cdot\overline{AM}$$

relaţia se verifică imediat.

2. *Soluţia analitică:*

Fie A (0,0); B (0,c); D (b,0). Pe dreaptă $\overline{BC}$, alegem punctul M astfel ca $\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}=k$. Avem atunci pentru coordonatele punctului M,

$$x=\frac{b}{1+k}, \qquad y=\frac{c}{1+\frac{1}{k}}$$

Calculând elementele problemei, avem:

$$\overline{AC}=b, \qquad \overline{AB}=c, \qquad \overline{BC}^2=b^2+c^2;$$

$$\overline{MC}^2=(b^2+c^2)\frac{k^2}{(1+k)^2}.$$

$$\overline{BM}^2=\frac{b^2+c^2}{(1+k)^2}, \qquad \overline{AM}^2=\frac{b^2+k^2c^2}{(1+k)^2}$$

Aceste cantităţi ne conduc dela sine la relaţia *Van Aubel.*

N. MIHAILEANU

SCOALA POLITECHNICĂ, TIMIŞOARA

Chestiuni propuse la examenul de admitere în anul pregătitor, Octombrie 1931.

Lucrări scrise.

Geometrie.

I.

Să se construiască un triunghiu isoscel cunoscând: poziţiunea vârfului opus bazei, poziţiunea punctului de întâlnire al medianelor triunghiului şi diferenţa între jumătatea bazei şi una din laturile egale.

II.

Să se determine pe o sferă dată punctele egal depărtate de trei puncte date în spaţiu. Discuţiune.

(5 Octombrie, 8—11)

Algebră şi Trigonometrie.

I.

O persoană împarte merele dintr'un coş la trei copii. Primul copil primeşte jumătate din merele din coş şi încă două mere; al 2-lea copil primeşte jumătate din merele rămase şi încă două mere; al 3-lea copil primeşte jumătate din merele ce au mai rămas şi încă două mere. In coş au rămas 3 mere după ce copii şi-au luat partea lor. Se cere numărul merelor ce au fost în coş înainte de a se împarte celor 3 copii.

II.

Să se determine a astfel ca ecuaţia:

$$\frac{a+x+ax-3}{1-a-x}=\frac{2-a-x}{a+x}$$

să admită o rădăcină $x=1$. Avem două valori pentru a. Inlocuind pe a cu valorile găsite în ecuaţia dată, se cere să se rezolve aceste ecuaţii obţinute.

III.

Să se rezolve un triunghiu isoscel, cu perimetru de 25 cm şi unghiul cuprins între laturile egale de 30°.

(5 Octombrie, 3—6)

Aritmetică.

Trei bucăţi de stofă lungi de 125 m, 142 m şi 95 m, au costat împreună 80924,25 lei. Ştiind că 3 metrii din prima bucată costă cât 4 metri din a doua şi cât 5 metri din a treia şi că dacă s'ar vinde toată stofa s'ar câştiga la prima bucată 16% din preţul ei de cost, dar s'ar pierde 4% la a doua din preţul de cost; se cere preţul de vânzare a unui metru din a treia bucată pentru a realiza un câştig total de 10% din preţul total de cost.

(6 Octombrie 8—11)

Chimie-Fizică.

Să se trateze *una* din următoarele şase chestiuni.

1. Sulful şi compuşii lui principali.
2. Metaloizi şi metale. Caracterele generale. Linii de comparaţie între ele.
3. Petrolul. Geneza, extracţia, compoziţia şi derivatele lui.
4. Electromagnetul şi aplicaţiile lui.
5. Fenomene periodice şi unde. Aplicaţiile lor.
6. Transformările energiei şi aplicaţiile lor.

(6 Octombrie, 3—5)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVII No. 1, Septembrie 1931. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică". Premii şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice". O proprietate a trei drepte concurente tăiate de o transversală, de *G. Zapan.*

PROBLEME REZOLVATE

977. — *Dacă în triunghiul isoscel* ABC (A B = A C = l) *există relaţia :*

$$6\cos^2 B = 1\cdot$$

atunci avem şi :

$$1^0.\ CD = BE = \frac{l}{3}$$

(unde D *şi* E *sunt picioarele înălţimilor duse din* B *şi* C*) şi reciproc.*

2⁰. *Să se indice mijlocul de a construi triunghiul* ABC *când se cunoaşte lungimea bazei* B C = a.

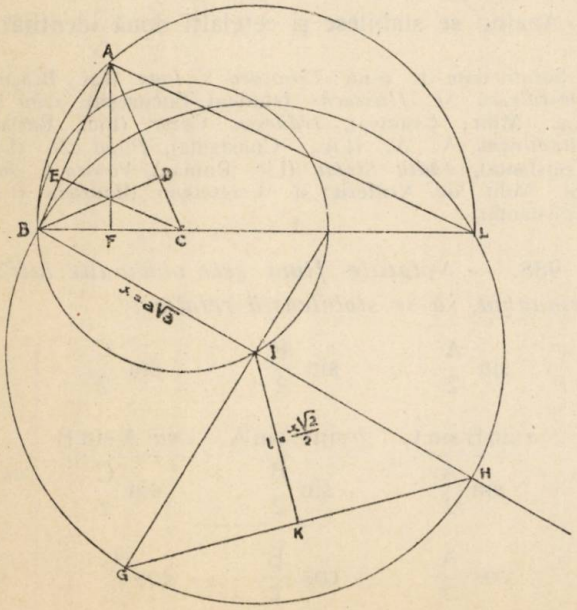
3⁰. *Paralele duse din* D *şi* E *la* A B *şi* A C *se taie în* A′, *aceleaşi paralele taie paralelele duse din* A′ *la* B D *şi* C E *în* B′ *şi* C′. *Triunghiurile* A B C *şi* A′ B′ C′ *sunt asemenea. Se cere raportul lor de asemănare.*

A. Coman

Soluţie :

1⁰. Din triunghiurile dreptunghice B E C şi B A F deducem :

$$BE = BC\cos B \quad \text{şi} \quad BC = 2l\cos B.$$



Rezultă :

$$BE = 2l\cos^2 B$$

sau dacă se ţine seamă de relaţia de condiţie dată :

$$BE = 2l \times \frac{1}{6} = \frac{l}{3}, \qquad \text{c. c. t. d.}$$

Reciproc dacă $BE = \frac{l}{3}$ avem $BC\cos B = \frac{l}{3}$ sau $2l\cos^2 B = \frac{l}{3}$, adică $6\cos^2 B = 1$.

2⁰. Construcţia triunghiului isoscel B A C, care să satisfacă condiţiunii din enunţ când se cunoaşte baza B C = a, se reduce la determinarea — pe cale grafică — a lui A B = A C = l. Utilizăm pentru aceasta, relaţia $BC = 2l\cos B$ sau $a = 2l\cos B$ pe care dacă o ridicăm la patrat şi ţinem seamă că $\cos^2 B = \frac{1}{6}$, obţinem $a^2 = 4l^2 \times \frac{1}{6}$ de unde $l^2 = \frac{3a^2}{2}$. Expresia obţinută pentru l poate fi construită în două moduri.

I. Putem scrie $l^2 = \frac{a}{2} \times 3a$, lungimea l apare deci ca media proporţională între lungimile cunoscute $\frac{a}{2}$ şi $3a$. De aci rezultă următoarea construcţie. Luăm un segment de dreaptă $BL = 3BC = 3a$ pe care descriem un semicerc. In F, mijlocul segmentului $BC = a$ ridicăm perpendiculara pe diametrul B L care întâlneşte semicercul în A, unind pe B cu A, obţinem lungimea căutată, căci din triunghiul dreptunghic B A L se deduce :

$$\overline{BA}^2 = BF \times BL = \frac{a}{2} \times 3a = l^2$$

II. Relaţia, $l^2 = \frac{3a^2}{2}$ se poate scrie, $l = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Pentru a construi pe l vom construi mai întâi lungimea $x = a\sqrt{3}$. Pentru aceasta din C ca centru cu raza a descriem un cerc, în care înscriem un triunghiu echilateral. Latura sa $BI = a\sqrt{3}$ este lungimea căutată x.

Vom construi, pe urmă, pe l cu ajutorul relaţiunii $l = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Pentru aceasta din I ca centru cu raza $x = a\sqrt{3}$ descriem un cerc, în care înscrim un patrat. Latura patratului înscris este $GH = x\sqrt{2}$, iar apotema sa este, $IK = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ adică lungimea cautată l.

3⁰. Paralele duse din D şi E la A B şi A C se taie din cauza simetriei, în A′ situat pe bisectoa-

rea unghiului A. Triunghiul obținut $A'B'C'$ este isoscel căci $A'D = A'E$, figura $ADA'E$ fiind un romb, iar $DB' = EC'$, ambele fiind egale cu l. Cum aceste două triunghiuri isoscele au și unghiul $A' = A$ rezultă asemănarea lor.

4°. Avem $A'B' = A'D + DB' = DA + AB = \frac{2AB}{3} + AB = \frac{5}{3}AB$. Rezultă $\frac{A'B'}{AB} = \frac{5}{3}$ care este raportul de asemănare a celor două triunghiuri.

Au dat soluțiuni bune și complecte d-nii: *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Pimișoara), *Păsculescu M. Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Pușcaru Z. I.* (Lic. Național, Iași), *Șerban Aurică* (Lic. Milit. „R. F. I.", Chișinău),

987. — *Să se demonstreze — α, β, γ fiind cele trei unghiuri ale unui triunghiu — că avem identitățile:*

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha = 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$$

$$\sin^2\gamma + \sin^2\alpha - \sin^2\beta = 2\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

A. HOLLINGER

Prima soluție. Fiindcă, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, putem scri:

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin\alpha$$

sau:

$$\sin^2(\beta + \gamma) = \sin^2\alpha$$

Dezvoltând, avem:

$$\sin^2\beta\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos^2\beta + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma = \sin^2\alpha$$

Inlocuind:

$$\cos^2\gamma = 1 - \sin^2\gamma \quad \text{și} \quad \cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta,$$

obținem:

$$\sin^2\beta - \sin^2\beta\sin^2\gamma + \sin^2\gamma - \sin^2\beta\sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma = \sin^2\alpha$$

$$\therefore \text{(1)} \qquad \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha = 2\sin\beta\sin\gamma(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma)$$

Observăm că avem însă:

$$\text{(2)} \quad \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma = -\cos(\beta + \gamma) = \cos\alpha$$

Ținând seamă de (2), relația (1) devine:

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha = 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha,$$

care este prima identitate cerută. Prin permutări circulare se deduc și celelalte două identități.

Soluții date de d-nii: *Băcicov Boris* (Tighina), *Băcicov Victor* (student), *Cristescu I.* (Sub.-Lt.), *Dini Ion* (Lic. Milit., Craiova), *Gall Tica* (Șc. Milit., de Artilerie), *Gandrabura Al* (student, Cluj), *Ioanin C. Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Lupescu Gh. C-tin* (Roman), *Marcu Aurel (†)*, *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mereuță Emilian* (student, București), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenița), *Negrea A Leonte Mircea* (student, București), *Neufeld Pavel* (Lic., Cluj), *Parepeanu I.*, (Lic., Brașov), *Pănoiu Emanoil* (Lic. Carol, Craiova), *Păsculescu M. Vasile* (bacalaureat Craiova), *Pop Leontin* (Șc. Polit., Timișoara), *Popa Gh. Ioan* (Lis., Oltenița), *Purdilă A.* (Brașov) și *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanța).

Soluția a 2-a. Considerăm relația cunoscută într'un triunghiu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

sau:

$$\text{(1)} \qquad b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$$

Dasă folosim acum relațiile cunoscute într'un triunghiu:

$$b = 2R\sin\beta, \qquad c = 2R\sin\gamma, \qquad a = 2R\sin\alpha,$$

atunci relația (1) devine:

$$4R^2\sin^2\beta + 4R^2\sin^2\gamma - 4R^2\sin^2\alpha = 8R^2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$$

Simplificând prin $4R^2$, găsim:

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha = 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha,$$

care este prima identitate cerută.

Analog se stabilesc și cetelalti două identități.

Soluții date de d-nii: *Cojocaru V. Ioan* (Lic., Brașov), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Dini Ion* (Lic. Milit., Craiova), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanța), *Popa N.* (Lic., Constanța), *Tăutu Ștefan* (Lic. Roman), *Vonica C. Ioan* (Șc. Milit. de Artilerie) și *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanța).

988. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relația:*

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{A}{2} & \sin\frac{B}{2} & \sin\frac{C}{2} \\ \frac{a\sin B\sin C}{\sin\frac{A}{2}} & \frac{b\sin C\sin A}{\sin\frac{B}{2}} & \frac{c\sin A\sin B}{\sin\frac{C}{2}} \\ \cos\frac{A}{2} & \cos\frac{B}{2} & \cos\frac{C}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2R}\sum r_a(h_b - h_c)$$

ION GH. PUPEZESCU

Ţinând seamă de formulele cunoscute:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} = p \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \ldots$$

$$h_a = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin B \sin C}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}},$$

deducem:

$$(1) \qquad \sin \frac{A}{2} = r_a \frac{\cos \frac{A}{2}}{p}$$

$$(2) \qquad \frac{a \sin B \sin C}{\sin \frac{A}{2}} = 2 h_a \cos \frac{A}{2}$$

In virtutea relaţiilor (1) şi (2) determinatul Δ din enunţ, se poate scri succesiv:

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_a \frac{\cos \frac{A}{2}}{p} & r_b \frac{\cos \frac{B}{2}}{p} & r_c \frac{\cos \frac{C}{2}}{p} \\ 2 h_a \cos \frac{A}{2} & 2 h_b \cos \frac{B}{2} & 2 h_c \cos \frac{C}{2} \\ \cos \frac{A}{2} & \cos \frac{B}{2} & \cos \frac{C}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2}{p} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \begin{vmatrix} r_a & r_b & r_c \\ h_a & h_b & h_c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore (3) \quad \Delta = \frac{2}{p} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \sum r_a (h_b - h_c)$$

Cum este cunoscută încă formula:

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R},$$

relaţia (3) devine:

$$\Delta = \frac{1}{2R} \sum r_a (h_b - h_c)$$

care este tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Dăscălescu Şt. Hristache* (student Bucureşti), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Marcu Aurel* (†), *Mereuţă Emilian* (Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Păsculescu Vasile* (bacalaureaut, Craiova) şi *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita).

990. — *Un jucător a câştigat la primul joc* $\frac{1}{4}$ *din banii ce-i avea plus 1 leu. La jocul al doilea a câştigat* $\frac{1}{3}$ *din banii ce-i avea atunci plus 2 lei; iar la jocul al treilea a câştigat* $\frac{1}{2}$ *din banii ce-i avea atunci plus 3 lei şi se ridică de la joc cu 48 lei. Ce sumă a avut? (Soluţie aritmetică).*

I. DUMITRIU-DADA

Suma avută de jucător la începutul jocului al 3-lea trebuie să fie astfel că mărită cu jumătatea ei şi încă 3 lei, să ne dea 48; rezultă dar că $48 - 3 = 45$ reprezintă 3 jumătăţi egale cu acea sumă. O jumătate este deci 15 lei şi deci 30 lei este sumă ce a avut'o jucătorul la începutul jocului al 3-lea sau la sfârşitul jocului al 2-lea.

Suma avută de jucător la începutul jocului al 2-lea trebuie să fie astfel că mărită cu $\frac{1}{3}$ din ea şi încă cu 2 lei să ne dea 30; rezultă dar că $30 - 2 = 28$ reprinţă $\frac{4}{3}$ din acea sumă. O treime este deci $\frac{28}{4} = 7$ lei, iar suma dela începutul jocului al 2-lea, sau la sfârşitul primului joc este 21 lei.

Suma aceasta de 21, este obţinută mărind suma iniţială cu $\frac{1}{4}$ din ea şi încă cu 1 leu, rezultă că $21 - 1 = 20$ reprezintă $\frac{5}{4}$ din suma iniţială. $\frac{1}{4}$ din aceasta sumă este $\frac{20}{5} = 4$, iar suma cu care s'a aşezat la joc este deci 16 lei.

Soluţii date de d-nii: *Curchi Ioan* (bacalaureat, Chişinău), *Dan Traian* (Beiuş), *Dumitraşcu N. Romeo* (Lic., Roman), *Florescu Haralambie* (Lic. Milit., Chişinău), *Gall Tica* (Şc. Milit. de Artilerie), *Gheorghe Valeriu* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Grinberg Meer* (Tighina), *Ioanin C. Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (Lic, Bârlad), *Jahab Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh.* (Lic., Roman), *Margulius Marius* (Lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Mehedinţi D.* (Lic., Braşov), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Nagler Mayer* (Lic. Naţional, Iaşi), *Parepeanu I.* (Lic. Braşov), *Pănoiu Emanoil* (Lic. Carol, Craiova), *Păsculescu M. Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Pascaru N. I.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Porumbescu D.* (Bucureşti), *Purdilă*

A. (Braşov), *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanţa), *Savovici Florentin* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Stăncescu Brezuica* (Caracal), *Voineagu Gh. R.* (Lic. Milit., Chişinău) şi *Weissman Mauriciu* (Lic., Constanţa).

991. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} 12x^2 + 48y^2 = 1248 \\ xy(14x^2 + 56y^2) = 14560 \end{cases}$$

BENIAMIN OPREA

Sistemul dat simplificat, se poate scri:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 104 \\ xy(x^2 + 4y^2) = 1040 \end{cases}$$

Ecuaţia 2-a, ţinând seamă de prima, devine:

$$xy = \frac{1040}{104} = 10$$

Astfel sistemul dat este echivalent, cu următorul:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 104 \\ xy = 10 \end{cases}$$

Adunând şi scăzând primei ecuaţii pe a 2-a înmulţită cu 4, obţinem:

$$\begin{cases} (x + 2y)^2 = 144 \\ (x - 2y)^2 = 64 \end{cases}$$

De aci rezultă următoarele patru sisteme de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = -12 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - 2y = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = -12 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$

care rezolvate ne dau respectiv:

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -10 \\ y = -1 \end{cases}$$

Aceastea sunt sistemele de soluţii, care se mai pot scri, în tabloul:

x	10	-2	2	-10
y	1	-5	5	-1

Soluţii date de d-nii: *Astilean Valeriu* (Lic., Cluj), *Boerescu P. George* (Lic., Oltenita), *Bojan Andrei* (Lic., Cluj), *Chirilă Andrei* (Lic., Timişoara), *Cincilian Agop* (Balcic), *Coandă V.* (Lic., Milit., Craiova), *Cojocaru V. I.* (Lic., Braşov), *Constantinescu Mircea* (Bucureşti), *Cristescu I.* (Sub.-Lt.), *Curchi Ion* (bacalaureat, Chişinău), *Dan Traian* (Lic., Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dumitraşcu N. Romeo* (Lic., Roman), *Felcean Simion*, *Fodorac M. Vasile* (Lic. Milit., Chişinău), *Gall Tica* (Şc. Milit. de Artilerie), *Goldner Sylvian* (bacalaureat Bucureşti) *Grinberg N. Meer* (Tighina), *Ioanin C. Gheorghe* (Lic. Carol, Craiova), *Ionescu Ştefan* (Lic., Roman), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Jahab Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Jeba C. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mehedinţi D.* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Motoc D.* (Lic., Oiteniţa), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Neufeld Pavel* (Lic., Cluj), *Neuländer Artur* (Lic., Cluj), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Paşcaru I.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Pănoiu Emanoil* (Lic. Carol, Craiova), *Păsculescu Vasile* (baclaureat, Craiova), *Păunescu N.* (Lic. Milit., Craiova), *Popa Emil* (Lic., Cluj), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Popescu C. Ştefan* (Lic. Milit., Craiova), *Porumbescu D.* (Bucureşti), *Purdilă A.* (Braşov), *Roth Martin* (Lic, Cluj), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Savovici Florentin* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Stan I.* (Lic., Roman), *Stefănescu Goangă A.*, *Vonica C. Ioan* (Sub.-Lt.) şi *Weissmann Mauriciu*(Lic., Constanţa).

995. — *In orice triunghiu există relaţiile:*

$$1^0. \qquad \sum \frac{\sin \frac{A}{2}}{r_a} = \frac{1}{2R}$$

$$2^0. \qquad \sum h_a \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2}{2R}$$

$$3^0. \qquad \sum \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{r_a h_a} = \frac{1}{2p^2} \sum \left(\frac{p}{p-a} - 1 \right)$$

SUB-LT. C-TIN V. COSTACHESCU

1. Folosind formulele cunoscute:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \quad \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

putem sri succesiv:

$$\frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{r_a} = \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{p \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2p} = \frac{\sin A}{2p} = \frac{a}{4pR}$$

De aci rezultă:

$$\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{r_a} = \sum \frac{a}{4pR} = \frac{a+b+c}{4pR} = \frac{1}{2R},$$

şi relaţia 1° este astfel stabilită.

2. In virtutea relațiilor cunoscute:

$$h_a = \frac{2s}{a}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad s = \frac{abc}{4R}$$

putem scri:

$$h_a \cos^2\frac{A}{2} = \frac{2sp(p-a)}{abc} = \frac{p(p-a)}{2R}$$

De aci deducem:

$$\sum h_a \cos^2\frac{A}{2} = \sum\frac{p(p-a)}{2R} = \frac{p}{2R}\sum(p-a) =$$

$$\frac{p}{2R}[3p-(a+b+c)] = \frac{p^2}{2R}.$$

Relația 2° este astfel stabilită.

3. Ținând seamă de relațiile cunoscute:

$$r_a = p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \frac{s}{p-a}, \quad k_a = \frac{2s}{a},$$

putem scri succesiv:

$$\frac{\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}}{r_a h_a} = \frac{r_a^2}{p^2 r_a h_a} = \frac{a r_a}{2p^2 s} = \frac{a}{2p^2(p-a)}$$

Deducem de aci:

$$\sum\frac{\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}}{r_a h_a} = \frac{1}{2p^2}\sum\frac{a}{p-a} = \frac{1}{2p^2}\sum\frac{p-(p-a)}{2p^2(p-a)} =$$

$$\frac{1}{2p^2}\sum\left(\frac{p}{p-a}-1\right).$$

Relația 3° este astfel și ea stabilită.

Soluții date de d-nii; *Cincilian Agop* (Balcic), *Cojocaru V. I.* (Lic., Brașov), *Dan Traian* (Beiuș), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Dumitrașcu N. Romeo* (Lic., Roman), *Gall Tica* (Șc. Milit. de Artilerie), *Grinberg N. Meer* bacalareat, Tighina), *Ioanin C. Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mereuță Emilian* (student, București), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanța), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, București), *Neufeld Pavel*, *Pănoiu Emanoil* (Lic. Carol, Craiova), *Păsculescu M. Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenița) și *Purdilă Anton* (Brașov).

999. — *Să se rezolve sistemul*:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-b-c} = \dfrac{y}{b-c-a} = \dfrac{z}{c-a-b} \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz = 2 \end{cases}$$

I. DIMITRIU-DADA

Dacă însemnăm prin k valoarea comună a rapoartelor egale, deducem ușor:

(1) $x = k(a-b-c)$, $y = k(b-c-a)$, $z = k(c-a-b)$

Inlocuind aceste valori în a 3-a ecuație a sistemului dat, avem:

$$k^2[(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(c-a-b)^2+$$
$$(a-b)^2-c^2+(b-c)^2-a^2+(c-a)^2-b^2] = 2$$

Făcând dezvoltările avem:

$$4k^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 2$$

De aci deducem:

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{2\Sigma(a^2-ab)}}$$

Inlocuind această valoare a lui k, în relațiile (1), deducem ușor:

$$x = \frac{a-b-c}{\pm\sqrt{2\Sigma(a^2-ab)}}, \quad y = \frac{b-c-a}{\pm\sqrt{2\Sigma(a^2-ab)}}$$

$$z = \frac{c-a-b}{\pm\sqrt{2\Sigma(a^2-ab)}}$$

care constituesc sistemul de soluții a sistemului dat.

Soluții date de d-nii: *Boerescu P. George* (Lic., Oltenița), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Grinberg Meer* bacalaureat, Tighina), *Ivănéscu Cezar* (Lic., Bârlad), *Jeba C. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mereuță Emilian* (student, București), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanța), *Neufeld Pavel*, *Nicolaescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Păscnlescu M. Vasile* bacalaureat, Craiova), *Popescu C. Ștefan* și *Purdilă A.* (Lic., Brașov).

A 2-a soluție. A 3-a ecuație a sistemului dat se poate scri:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-y)^2 = 4$$

Din primele două ecuații deducem:

$$\frac{x-y}{a-b} = \frac{y-z}{b-c} = \frac{z-x}{c-a}$$

$$\therefore \quad \frac{(x-y)^2}{(a-b)^2} = \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2} =$$

$$\frac{4}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

Putem scri încă:

$$\frac{x-y}{a-b} = \frac{2x}{a-b-c} = \frac{2}{\pm\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}}$$

de unde:

$$x = \frac{a-b-c}{\pm\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}}$$

și analog:

$$y = \frac{b-c-a}{\pm\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}},$$

$$z = \frac{c-a-b}{\pm\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}}$$

Soluții date de d-nii: *Negrea A. Mircea Leonte* (student, București). *Pănoiu Emanoil* (Lic. Carol, Craiova) și *Stan Ioan* (Lic., Roman).

PROBLEME PROPUSE

1039. — Să se găsească o fracție a cărei valoare nu se schimbă dacă se adună numărătorului $4k$, iar numitorului $5k$, știind că cel mai mic comun multiplu al termenilor fracției este 380.

IOAN CURCHI

1040. — Să se găsească restul împărțirii prin 9 a numărului 73^{729}.

SUB.-LT. ION C. VONICA

1041. — Să se rezolve sistemul:

$$y(1+x^2) = ax(1+y^2)$$

$$y(1-x^2) = bx(1-y^2)$$

I. DUMITRIU-DADA

1042. — Se dă ecuația:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

cu rădăcinele x_1, x_2, x_3. Fără a rezolva această ecuație, se cere să se formeze o altă ecuație de gradul al treilea, cu rădăcinele:

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}, \quad y_3 = x_3 + \frac{1}{x_3}$$

CEZAR IVANESCU

1043. — In triunghiul ABC, paralele cu mediana vârfului A, duse prin C și B, întâlnesc perpendiculara pe aceiași mediană, dusă prin A, în C_1 și B_1.

Să se arate că perpendicularele coborâte din C_1 și B_1 respectiv pe AC și AB concură pe înălțimea vârfului A.

C-TIN IONESCU-BUJOR

1044. — AB fiind o coardă a unui cerc și M un punct oarecare pe acest cerc, fie C polul dreptei AB în raport cu cercul. Paralela dusă prin C la AB tae dreptele MA și MB în D și E. Să se arate că.

$$\overline{DC}\cdot\overline{CE} = \overline{AC}^2,$$

oricare ar fi punctul M pe cerc, adică punctele D și E determină o involuție pe dreapta pe care se găsesc.

N. ABRAMESCU

1045 — Să se stabilească identitatea:

$$\cos 3\alpha = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\left[4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - 6\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\alpha + 3\cos 2\alpha\right]$$

V. ALACI

1046. — Dreptunghiul ABCD ($AB=a$, $BC=b$) se rostește în jurul vârfului A de un unghiu α. Să se arate că:

1°. Dacă α verifică relația:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2,$$

atunci aria triunghiului CAC', — $AB'C'D'$ fiind dreptunghiul rotit — este egală cu a dreptunghiului dat. Să se deducă de aci valoarea lui α în funcțiune de unghiul $BAC = \theta$. Cazul când $a=b$.

2°. Dacă α verifică relația:

$$1+\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

perimetrul triunghiului CAC' este egal cu acel al dreptunghiului dat. Să se găsească α când $a=b$.

AUGUST COMAN

CANDIDAȚII REUȘIȚI LA EXAMENUL DE ADMITERE IN ANUL PREPERATOR (5—8 OCTOMVRIE 1931)

1. *Ropcianu Gr. Mihai* (Liceul Internat, Iași).
2. *Petrenco I. Ioan*, (Liceul Sft. Dumitru, Ismail).
3. *Mihai* F. *Edit M.*, (Lic. Carmen Sylva, Timișoara).
4. *Purdilă Anton*, (Liceul Dr. I. Meșota, Brașov).
5. *Lazar C. Dumitru*, (Șc. Sup. de Com., Timișoara).
6. *Săvescu Gr. Ionel*, (Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila).
7. *Gluşco Nicolae*, (Lic. Vasile Lupu, Orheiu).
8. *Pau Gh. Eugen*, (L. C. Diaconovici Loga, Timișoara).
9. *Greavu I. D-tru*, (Lic. Mircea cel Bătrân, Constanța).
10. *Süli M. Mihai*, (Liceul de Stat, Salonta).
11. *Popa B. I. Ioan*, (Șc. Cond. Technici, Cluj).
12. *Rogojan A. Alexandru*, (Lic. Andrei Mureșanu, Dej).
13. *Petcu D. Ioan*, (Lic. Alecu Rusu, Chișinău).
14. *Hackel M. Adalbert*, (Lic. Dragoș Vodă, Sighet).
15. *Lăzărescu M. I.*, (Șc. Cond. Luc. Publ., București).
16. *Calciu M. Ioan*, (L. Mircea cel Bătrân, Constanța).
17. *Diaconescu I. A.*, (L. Principele Nicolae, Sighișoara)
18. *Ivancenco A. Alex.*, (Șc. Cond. Technici, Cluj).
19. *Calciu C. Teodor*, (L. Mircea cel Bătrân, Constanța).
20. *Rădulescu A. Mihai*, (Lic. Nic. Bălcescu, Brăila),
21. *Dima A. Gheorghe*, (Șc. Sup. de Com., Galați).
22. *Stefan M. Mihail*, (Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila),
23. *Chiriţescu D. N.*, (L. Mircea cel Bătrân, Constanța).
24. *Enderl St. I. I.*, (Lic. Al. Papiu Ilarion, Tg,-Mureș).
25. *Czeizler S. Ladislau*, Lic, Moise Nicoară, Arad).
26. *Iakab B. Nicolae*, (Liceul Piarist, Timișoara).
27. *Meici I. Ioan*, (L. C. Diaconovici Loga, Timișoara).
28. *Beliţchi D. Mircea*, (Lic. de Stat, Siret),
29. *Ionescu D. Ioan*, Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila).
30. *Moianu G. Spiridon*, (Lic. Gh. Barițiu, Cluj).
31. *Ghiţiu V. Vasile* (Lic. Mihail Eminescu, Satu-Mare).
32. *Melian I. Septimius*, (Lic. Petru Maior, Gherla).
33. *Chintoanu V. Sabin*, (Lic. Gh. Barițiu, Cluj).
34. *Gropşorean S. Toma*, (Șc. Comer. Sup., Timișoara).
35. *Uzunov N. Vadim*, (L. Reg. Mihai I, Cetatea-Albă).
36. *Daba I. Muică*, (Lic. G-ral Dragalina. Oravița).
37. *Humiţa T. Teodor Carol*, (Lic. Gh. Barițiu, Cluj).
38. *Panov P. Ioan*, (Lic. Regele Mihai I, Cetatea-Albă).
39. *Cocheci D. P.*, (Lic. Mihail Eminescu, Satu-Mare).
40. *Cosma I. A. Tiberiu*, (Lic. Gh. Barițiu, Cluj).
41. *Moţet V. Eduard*, (Șc. Sup. Comerț, Timișoara).
42. *Munteanu D. D-tru*, (Lic. Nic. Bălcescu, Brăila).
43. *Cheorghiu N. Al.*, (L. Mircea cel Bătrân, Constanța).
44. *Ghibu S. Ioan*, (Liceul Gh. Barițiu, Cluj).
45. *Neaga Vladimir*, (Lic. Alecu Rusu, Chișinău).
46. *Oniga N. Vasile*, (Lic. Andrei Mureșanu, Dej).
47. *Pascu T. Radu*, (Lic, Andrei Hașdeu, Buzău).
48. *Riuboi P. Vladimir.* (Lic. Alecu Rusu, Chișinău).
49. *Avramov P. Ar.*, (Lic. Mircea cel Bătrân, Constanța),
50. *Harinco E. Eug.*, (L. ev. C. A. Bruckenthal, Sibiu).
51. *Hnatiuc T. Emilian*, (Lic. Nicu Gane, Fălticeni).
52. *Munthiu Gh. Gheorghe*, (Lic. Moisă Nicoară, Arad).
53. *Guţu I. Aurel*, (L. C. Diaconovici Loga, Timișoara).
54. *Radu I. Sorin Voicu*, (Lic. Avram Iancu, Brad).
55. *Stempcovsky I. V.*, (Lic. Reg. Mihai I, Cetatea-Albă).
56. *Gherghel N. Viorel.* (Șc. Com. Sup., Timișoara).
57. *Püllök E. Gezi*, (Liceul Piarist, Timișoara).
58. *Vlăduţiu P. Mircea*, (Lic. Petru Maior, Gherla).
59. *Cărăbaș St. Stefan*, (Șc. Sup, Comerț, Timișoara).
60. *Nagy C. Ernest*, (Lic. Andrei Mureșanu, Dej).
61. *Balomiri T. Ioau*, (Lic. Gh. Barițiu, Cluj).
62. *Conrad A. Emil*, (Lic. Gh. Barițiu, Cluj).
63. *Alexa V. Vas.*, (Lic. C. Diaconovici Loga, Timișoara).
64. *Ionescu N. Nic.*, (Lic. Mircea cel Bătrân, Constanța).

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XI. 15 NOEMVRIE 1931 NO. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CEZAR COSNITA ASUPRA UNOR IDENTITATI
2. NOTE MATEMATICE: 20, 21, 22
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 907, 970, 994, 997, 998, 1004, 1006, 1007, 1008, 1011
5. PROBLEME PROPUSE: 1047-1054
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de artegrafice „Tipografia Românească“

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei.

ANUL XI— NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMVRIE 1931

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

ASUPRA UNOR IDENTITAȚI

de CEZAR COSNITA

Problema 3676 din „*Gazeta Matematică*“ cât și problema 917 din „*Revista Matematică*“ se pot trata în mod elegant și în cazuri mult mai generale, cu ajutorul „*Teoriei Diferențelor*“.

Să considerăm șirul:

$$u_0 = \frac{1}{x},\quad u_1 = \frac{1}{x+h},\ldots, u_n = \frac{1}{x+nh}.$$

Diferențele prime ale acestui șir sunt:

$$\Delta u_0 = \frac{-h}{x(x+h)},\ \Delta u_1 = \frac{-h}{(x+h)(x+2h)},\ldots,$$

$$\Delta u_{n-1} = \frac{-h}{[x+(n-1)h](x+nh)}.$$

Diferențele de al doilea ordin sunt:

$$\Delta^2 u_0 = \frac{(-1)^2\, 2!\, h^2}{x(x+h)(x+2h)},\ldots,$$

$$\Delta^2 u_{n-2} = \frac{(-1)^2\, 2!\, h^2}{[x+(n-2)h][x+(n-1)h](x+nh)}$$

Zic că diferența de ordinul n va fi:

$$\Delta^n u_0 = \frac{(-1)^n\, n!\, h^n}{x(x+h)\ldots(x+nh)} \tag{2}$$

In adevăr, formula (1) este verificată pentru $n=1$, $n=2$, după cum am văzut mai sus. Să presupunem că ea are loc pentru $n=p$ și să dovedim că, în acest caz, ea are loc și pentru $n=p+1$.

Presupunem deci că avem:

$$\Delta^p u_0 = \frac{(-1)^p\, p!\, h^p}{x(x+k)\ldots(x+ph)},$$

și dacă seriem formula analoagă pentru șirul $u_1, u_2, \ldots, u_{p+1}$, avem:

$$\Delta^p u_1 = \frac{(-1)^p\, p!\, h^p}{(x+h)(x+2h)\ldots[x+(p+1)h]}.$$

Rezultă:

$$\Delta^{p+1} u_0 = \Delta^p u_1 - \Delta^p u_0 =$$

$$\frac{(-1)^p\, p!\, h^p}{(x+h)\ldots(x+ph)}\left[\frac{1}{x+(p+1)h} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$\frac{(-1)^{p+1}(p+1)!\, h^{p+1}}{x(x+h)\ldots[x+(p+1)h]}.$$

Se vede că formula (1) are loc și pentru $n=p+1$, deci este generală.

Dacă acum considerăm și formula care dă diferența de ordinul n a șirului:

$$\Delta^n u_0 = u_n - C_n^1 u_{n-1} + C_n^2 u_{n-2} -$$

$$\ldots + (-1)^n\, C_n^n u_0,$$

și apropiem cele două expresii ale diferenței $\Delta^n u_0$, avem identitatea următoare:

$$\frac{(-1)^n\, n!\, h^n}{x(x+h)\ldots(x+nh)} \equiv \frac{1}{x+nh} -$$

$$\frac{1}{x+(n-1)h} C_n^1 + \frac{1}{x+(n-2)h} C_n^2 -$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{1}{x} C_n^n$$

Inmulțind ambii membri ai identității cu $(-1)^n$ și ținând seamă că avem:

$$C_n^n = C_n^0 = 1,\qquad C_n^{n-1} = C_n^1,\ldots,$$

identitatea se mai scrie:

$$\frac{n!\, h^n}{x(x+h)\ldots(x+nh)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{x+h} C_n^1 +$$

$$\frac{1}{x+2h} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{x+nh} C_n^n.$$

Făcând aici:

$$x = n+1, \qquad h = n$$

găsim identitatea:

$$\frac{n!\,(n^n)}{(n+1)(2n+1)\ldots[n(n+1)+1]} \equiv \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} C_n^1 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n(n+1)+1} C_n^n$$

care face obiectul problemei 3676 din „G. M.“

In aceași identitate făcând $x = h$, avem:

$$\frac{1}{n+1} \equiv 1 - \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} C_n^n$$

Acum să considerăm un caz mai general.

Fie șirul:

$$u_0, \quad u_1, \ldots, u_{n-1}, \quad u_n$$

în care:

$$u_0 = \frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(p-1)h]},$$

$$u_1 = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+ph)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{[x+(n-1)h](x+nh)\ldots[x+(n+p-2)h]}$$

$$u_n = \frac{1}{(x+nh)\ldots[x+(n+p-1)h]}$$

Diferențele prime ale acestui șir sunt:

$$\Delta u_0 = \frac{-ph}{x(x+h)\ldots(x+ph)},$$

$$\Delta u_1 = \frac{-ph}{(x+h)(x+2h)\ldots[x+(p+1)h]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta u_{n-1} = \frac{-ph}{(x+nh)\ldots[x+(p+n-1)h]}$$

Diferențele de al doilea ordin sunt:

$$\Delta^2 u_0 = \frac{(-1)^2 (p+1) h^2}{x(x+h)\ldots[x+(p+1)h]} \cdots$$

Legea de formare a diferențelor succesive este acum vizibilă. Zic că în general avem:

$$(2) \qquad \Delta^n u_0 = \frac{(-1)^n p(p+1)\ldots(p+n-1)h^n}{x(x+h)\ldots[x+(p+n-1)h]}$$

In adevăr, formula (2) am văzut că se verifică pentru $n=1$, $n=2$. Să presupunem că ea are loc pentru $n=r$, adică:

$$\Delta^r u_0 = \frac{(-1)^r p(p+1)\ldots[x+(p+r-1)h^r}{x(x+h)\ldots[x+(p+r-1)h]}$$

și să dovedim că ea are loc și pentru $n=r+1$.

Scriind aceiași formulă pentru șirul:

$$u_1, \quad u_2, \ldots, u_{n+1},$$

avem:

$$\Delta^r u_1 = \frac{(-1)^r p(p+1)\ldots(p+r-1)h^r}{(x+h)(x+2h)\ldots[x+(p+r)h]}$$

Avem apoi:

$$\Delta^{r+1} u_0 = \Delta^r u_1 - \Delta^r u_0 =$$

$$\frac{(-1)^r p(p+1)\ldots(p+r-1)h^r}{x(x+h)\ldots[x+(p+r-1)h]} \times$$

$$\left[\frac{1}{x+(p+r)h} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$\frac{(-1)^{r+1} p(p+1)\ldots(p+r)h^{r+1}}{x(x+h)\ldots[x+(p+r)h]}$$

Deci formula (2) este generală.

Apropiind acum expresia lui $\Delta^n u_0$, găsită mai sus, de expresia sa dată de formula generală, avem identitatea:

$$\frac{(-1)^n p+1)\ldots(p+n-1)h^n}{x(x+h)\ldots[x+(p+n-1)h]} \equiv$$

$$\frac{1}{(x+nh)\ldots[x+(p+n-1)h]} - \ldots +$$

$$(-1)^n \frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(p-1)h]} C_n^n$$

sau:

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)h^n}{x(x+h)\ldots[x+(p+n-1)h]} \equiv$$

$$\frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(p-1)h]} -$$

$$\frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+ph)} C_n^1 -$$

$$\ldots + (-1)^r \frac{1}{(x+nh)\ldots[x+(p+n-1)h]} C_n^n$$

Pentru $p=1$ găsim identitatea stabilită în cazul precedent. Dând lui p alte valori, avem alte identităţi mai generale decât cea din „G. M.“

Făcând $x=h$, avem identitatea:

$$\frac{1}{(p-1)!(p+n)} \equiv \frac{1}{1.2\ldots p} - \frac{1}{2.3\ldots(p+1)} C_n^1 + \frac{1}{3.4\ldots(p+2)} C_n^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} C_n^n.$$

Această identitate se mai poate scrie şi astfel:

$$\frac{1}{(p-1)!(p+n)} \equiv \frac{A_n^0}{p!} - \frac{A_n^1}{(p+1)!} + \frac{A_n^2}{(p+2)!} - \cdots + (-1)^n \frac{A_n^n}{(p+n)!},$$

în care A este simbolul aranjamentelor şi $A_n^0 = 1$.

Să considerăm acum şirul:

$$u_0 = f(x), \quad u_1 = f(x+h), \ldots, n_n = f(x+nh),$$

ataşat polinomului:

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Se demonstrează că diferenţa de ordinul n a şirului este:

$$\Delta^n u^0 = n! A_0 h^n$$

(A se vedea de exemplu: *Cours d'Algèbre par B. Niewenglowski*).

Considerând şi expresia lui $\Delta^n u_0$ dată de formula generală, avem identitatea:

(I) $$n! h^n A_0 \equiv f(x+nh) - C_n^1 f[x+(n-1)h] + \cdots + (-1)^n C_n^n f(x).$$

Dacă acum presupunem că $f(x)$ este un polinom de gradul p, atunci avem:

$$\Delta^p u_0 = p! h^p A_0,$$

iar diferenţele de ordin superior sunt toate nule.

Deci dacă presupunem $p < n$, avem identitatea:

(II) $$f(x+nh) - C_n^1 f[x+(n-1)h] + C_n^2 f[x+(n-2)h] - \ldots + (-1)^n C_n^n f(x) = 0$$

Particularizând polinoamele $f(x)$ din (I) şi (II) obţinem identităţi remarcabile. De exemplu, în (I) luând $f(x) = x^n$, $h = -1$, avem:

$$(-1)^n n! \equiv (x-n)^n - C_n^1 (x-n+1)^n + \cdots + (-1)^n C_n^n x^n,$$

sau:

(3) $$n! \equiv x^n - C_n^1 (x-1)^n + C_n^2 (x-2)^n - \cdots + (-1)^n C_n^n (x-n)^n.$$

In identitatea (II) luând $f(x) = x^p$, $h = -1$, avem:

(4) $$x^p - C_n^1 (x-1)^p + C_n^2 (x-2)^p - \cdots + (-1)^n (x-n)^p \equiv 0. \qquad (n > p)$$

Identităţile (3), (4) se găsesc propuse în: *Cours d'Algèbre* par *B. Niewenglowski*, tome second, page 569.

In identitatea (3) luând $x = n$, avem problema 917 din „R. M. T.“

$$n! \equiv n^n - C_n^1 \cdot (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - \ldots + (-1)^{n+1}.$$

NOTE MATEMATICE

20. — *Asupra unui articol.*

In articolul publicat în „R. M. T.“ vol. XI, No. 8, pentru a ajunge la relaţiile (2) şi (4) am întrebuinţat o metodă trigonometrică, pentruca demonstraţiile să fie complecte. Se putea însă ajunge la aceste relaţii pe cale pur geometrică, anume folosind proprietatea bine cunoscută a proectivităţii raportului anarmonic al unui fascicol de drepte.

In adevăr, să însemnăm în ultimile două figuri ale articolului citat cu A″, B″, C″ punctele în cari dreptele AA′, BB′, CC′ tae respectiv pe B′C′, C′A′, A′B′ şi să considerăm în a doua figură fascicolul:

$$\omega(B\,a\,A'\,C)$$

sau, ceeace e tot una, fascicolul:

$$\omega(B'\,a'\,A''\,C')$$

pe care tăindu-l cu dreptele BC, B′C′, vom avea:

$$\frac{a\,B}{a\,C}:\frac{A'\,B}{A'\,C}=\frac{a'\,B'}{a'\,C'}:\frac{A''\,B'}{A''\,C'}.$$

Scriind şi relaţiile analoage:

$$\frac{b\,C}{b\,A}:\frac{B'\,C}{B'\,A}=\frac{b'\,C'}{b'\,A'}:\frac{B''\,C'}{B''\,A'},$$

$$\frac{c\,A}{c\,B}:\frac{C'\,A}{C'\,B}=\frac{c'\,A'}{c'\,B'}:\frac{C''\,A'}{C''\,B'},$$

înmulţindu-le şi ţinând seamă că avem:

$$\frac{A'\,B}{A'\,C}\cdot\frac{B'\,C}{B'\,A}\cdot\frac{C'\,A}{C'\,B}=-1,\quad \frac{A''\,B'}{A''\,C'}\cdot\frac{B''\,C'}{B''\,A'}\cdot\frac{C''\,A'}{C''\,B'}=-1,$$

găsim relaţia (2).

Să considerăm acum în figura a 3-a fascicolul:

$$A\,(B\,A'\,\alpha\,C)$$

pe care tăindu-l cu dreptele B C, B′C′, avem:

$$\frac{\alpha\,B}{\alpha\,C}:\frac{A'\,B}{A'\,C}=\frac{\alpha'\,C'}{\alpha'\,B'}:\frac{A''\,C'}{A''\,B'}.$$

Considerând şi relaţiile analoage şi înmulţind, obţinem relaţia (4).

Şi acum o observare: In articolul citat am găsit anumite valori pentru rapoartele cari intervin în relaţia (2) şi în (4) iar mai sus am găsit alte valori. De exemplu, în locul citat, am găsit:

$$\frac{a\,B}{a\,C}=\frac{\omega\,B}{\omega\,C}\cdot\frac{\omega\,C'}{\omega\,B'}\cdot\frac{a'\,B'}{a'\,C'}$$

iar acum am găsit:

$$\frac{a\,B}{a\,C}=\frac{a'\,B'}{a'\,C'}\cdot\frac{A'\,B}{A'\,C}:\frac{A''\,B'}{A''\,C'}.$$

S'ar părea că cele două expresiuni sunt diferite, în reelitate ele sunt identice, cum se vede uşor.

CEZAR COSNITA

21. — *„Asupra unei probleme de Algebră superioară“.*

In cele ce urmează îmi propun a rezolva pe cale elementară urmatoarea problemă de algebră.

„Să se găsească condiţia ca ecuaţiile:

$$A\,x^3+B\,x^2+C\,x+D=0;\quad A\,x^2+C\,x+D=0$$

să aibă o rădăcină comună şi să se găsească acea rădăcină“.

Fie x_1 acea rădăcină comună. Pentru $x=x_1$ ecuaţiile date sunt identice nule, deci:

$$A\,x_1^3+B\,x_1^2+C\,x_1+D\equiv A\,x_1^2+C\,x_1+D$$

$$\therefore\qquad A\,x_1^3-(A-B)\,x_1^2=0$$

de unde:

$$(1)\qquad x_1=0\quad\text{şi}\quad (2)\qquad x_1=\frac{A-B}{A}$$

Substituind în una din ecuaţii pe rând valorile lui x_1, găsim condiţiile ca ecuaţiile date să admită o rădăcină comună:

$$(3)\ D=0\quad\text{şi}\quad (4)\ [A-B][A+B+C]+A\,D=0$$

Făcând în problema de mai sus $A=1$, $B=0$,

$$c=p_1\quad\text{şi}\quad D=q$$

dăm peste problema 3978. G. M. No. 5 şi totodată peste soluţiile ei.

EMILIAN MEREUTA

22. — *Calculul coeficienţilor binomului lui Newton din patru în patru.*

Dacă în identitatea:

$$(1)\qquad \cos n\,\alpha_1+C_n^1\cos[(n-1)\,\alpha_1+\alpha]+$$
$$\cdots+C_n^k\cos[n-k)\,\alpha_1+k\,\alpha]+\cdots+\cos n\,\alpha=$$
$$2^n\cos^n\frac{\alpha_1-\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\alpha)\,n}{2},$$

facem $\alpha=0$, obţinem identitatea:

$$(2)\qquad \cos n\,\alpha_1+C_n^1\cos(n-1)\,\alpha_1+$$
$$\cdots+C_n^k\cos(n-k)\,\alpha_1+\cdots+C_n^{n-1}\cos\alpha_1+1=$$
$$2^n\cos^n\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{n\,\alpha_1}{2}$$

Tot în identitatea (1) făcând $\alpha=\pi$ obţinem identitatea:

$$(3)\ \cos n\,\alpha_1-C_n^1\cos(n-1)\,\alpha_1+C_n^2\cos(n-2)\,\alpha_1-$$
$$\cdots+(-1)^k\,C_n^k\cos(n-k)\,\alpha_1+\ldots+(-1)^n=$$
$$2^n\sin^n\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{(\alpha_1+\pi)\,n}{2}$$

Adunând (2) cu (3) şi punând condiţia ca n să fie multiplu de patru, primim după simplificare cu 2 identitatea:

$$(4)\ \cos n\,\alpha_1+C_n^2\cos(n-2)\,\alpha_1+C_n^4\cos(n-4)\,\alpha_1+$$

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

$$\cdots + C_n^{n-2} \cos 2\alpha_1 + 1 =$$

$$2^{n-1}\left[\cos^n \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{n\alpha_1}{2} + \sin^n \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{(\alpha_1 + \pi)n}{2}\right]$$

Dacă în această identitate facem $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, ţinând seamă de condiţia ce am pus-o ca n să fie multiplu de 4 şi mai observând că avem:

$$\cos(2k\pi \pm p.\pi) = -1$$

p fiind un număr prim, obţinem:

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots + C_n^{n-4} - C_n^{n-2} +$$

$$C_n^n = 2^{n-1}\left[\cos^n \frac{\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{4} + \sin^n \frac{\pi}{4} \sin \frac{3n\pi}{4}\right]$$

dar:

$$\cos^n \frac{\pi}{4} = \sin^n \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

deci avem:

(5) $$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots + C_n^{n-4} - C_n^{n-2} +$$

$$C_n^n = 2^{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left[\cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{3n\pi}{4}\right] =$$

$$(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} \qquad (n = 4p)$$

Din identitatea (4), pentru $\alpha_1 = 0$, deducem:

(1) $$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots + C_n^{n-2} + C_n^n = 2^{n-1}$$

Din adunarea relaţiilor (5) şi (6) obţinem:

(7) $$1 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots + C_n^{n-4} + C_n^n =$$

$$2^{n-2} + (\sqrt{2})^{n-2} \cos \frac{n\pi}{4}$$

iar prin scădere primim:

(8) $$C_n^2 + C_n^6 + \cdots + C_n^{n-6} + C_n^{n-2} =$$

$$2^{n-2} - (\sqrt{2})^{n-2} \cos \frac{n\pi}{4}$$

Produsul $(\sqrt{2})^{n-2} \cos \frac{n\pi}{2}$ este pozitiv sau negativ după cum n e un multiplu cu soţ sau fără soţ de patru.

Exemplu: Pentru $n = 8$ identităţile (7) şi (8) devin:

$$1 + C_8^4 + C_8^8 = 2^6 + 2^3 = 8(8+1) = 72$$

$$C_8^2 + C_8^6 = 2^6 - 2^3 = 8(8-1) = 56$$

Identităţi ce se pot verifica.

TEODOR MARSIEU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXVII, Octomvrie 1931. Sur les carrés parfaits, par *V. Thébault*. Asupra rezolvării în numere întregi a unei ecuaţii omogene de gradul al doilea cu n variabile, de *Ioan B. Florescu*.

2. *Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara*. Tome 4, Fasc. 1—2, 1931. Cuprinde: Une classe de fonctions simples-discontinues à deux variables, par *V. Alaci*. Sur l'équation intégrale de *Weyl*, par *M. Ghermonesco*. Zur Theorie der eisenlosen Induktionsöfen, von Ing. *Remus Răduleţ*. Randwirkungen in der Elektrotechnik, von Ing. *Remus Răduleţ*. Sur une famille spéciale de tolérances appliquée aux moteurs d'aviation, par *Capitaine Ing. Georges Nicolesco*. Einfluss der Ausgangskorngrösse auf die Endkorngrösse der Kristalle bei der Rekristallisation, von Ing. *Rău Alexandru*.

3. *Mathematica*, vol. V, 1931. Sur l'allure de la représentation conforme dans le voisinage d'un point exceptionnel, par *M. Biernacki*. Sur un théorème de M. G. Calugareano, par *Th. Varopoulos*. Sur les variétés totalement géodésiques d'un espace de *Riemann*, par *Gr. C. Moisil*. Sur la définition axiomatique de la moyenne, par *Luca Teodoriu*. Über Simplexe in Schläflischer Lage, von *E. A. Weiss*. Sur les suites de polynomes, par *T. Popoviciu*. Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points, par *W Sierpinszki*. Sur la déformation le long de trajectoires orthogonales, par *A. Pantazi*. Sur les lois de dépendence de l'intégrale de l'équation différentielle $y' = f(x\,y)$, vis-a-vis de son point d'origine, par *Mlle Marie Charpentier*. Sur l'intégration orientée des équations differentielles non analytiques, par *Miron Nicolesco*. Sur les fractions rationelles à termes entrelacés, par *Paul Mantel*. Contribution à la théorie des fonctionelles liniaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits, par *Otton Nikodym*. Fonctions holomorphes dans l'espace, par *Gr. C. Moisil* et *N. Théodoresco*.

4. *Boletin Matematico*, publicat de *Dr. Bernardo I. Baidaff*, anul IV, August 1931. Sur les surfaces élémentaires du 3-e ordre de la géométrie, par *A. Bloch*. Chestiuni importante din geometria triunghiului în legătură cu cercurile tritangente, de *M. Grünbaum*.

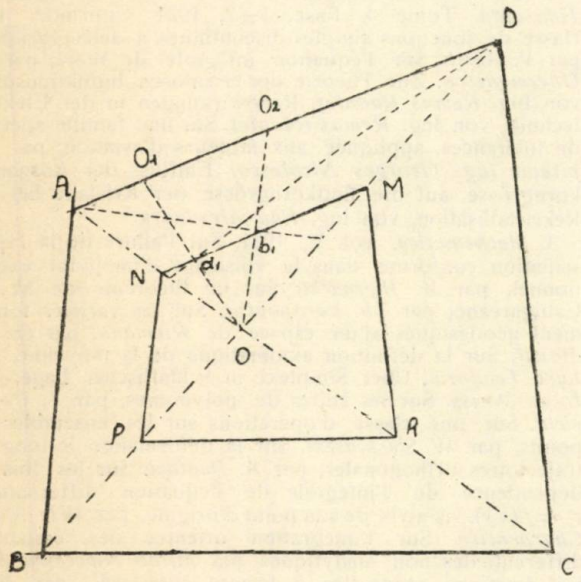
PROBLEME REZOLVATE

907. — *Intr'un patrulater oarecare, diagonalele* AC *şi* BD *care se intersectează în* O *formează triunghiurile* AOD, DOC, COB, BOA. *Fie* (a_1, b_1) *proecţiile punctului* O *pe bisectoarele interioare ale unghiurilor* A *şi* D *din triunghiul*

A O D. *La fel se obţin în celelalte triunghiuri perechile de puncte* (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4). *Patrulaterul format prin intersecţia dreptelor* $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$ *este un patrulater asemenea cu* A B C D *şi de patru ori mai mic.*

VLADIMIR I. CRIVAT

Fie patrulaterul A B C D cu diagonele A C şi B D. Proectăm punctul O pe bisectoarele unghiurilor D şi A din triunghiul A O D în a_1 şi b_1 şi prelungim pe O a_1 şi O b_1 până în O_1 şi O_2 de pe latura A D.



Observăm uşor că triunghiul O D O_1 este isoscel, deoarece D a_1 este bisectoarea unghiului D şi în acelaşi timp este şi înălţimea dusă din D. Rezultă că avem:

$$O a_1 = a_1 O_1$$

Triunghiul O A O_2 fiind şi el isoscel pentru acelaşi motive, rezultă:

$$O b_1 = b_1 O_2$$

$a_1 b_1$ împărţind laturile O O_1, O O_2 ale triunghiului O O_1 O_2 în părţi egale, rezultă că este paralelă cu $O_1 O_2$ şi egală cu jumătatea ei.

Prelungind pe $a_1 b_1$ până în punctele M şi N respectiv pe O D şi O A, rezultă că şi M N este paralelă cu A D şi egală cu jumătatea ei.

Repetând aceleaşi construcţii care le-am făcut în triunghiul A O D, în celelalte triunghiuri D O C, C O B şi B O A găsim dreptele M R, R P şi P N respectiv paralele cu D C, C B şi B A şi egale cu jumătatea lor.

Patrulaterele M N P R şi D A B C sunt deci omotetice, O fiind centru de omotetie şi $\frac{1}{2}$ raportul de omotetie. Raportul suprafeţelor lor fiind patratul raportului a două laturi omoloage, este deci $\frac{1}{4}$.

Patrulaterul M N P R este deci asemenea cu D A B C şi de patru ori mai mic.

Soluţii date de d-nii: *Lascu Ioan* (Lic. Milit., Craiova), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Purdilă A.* (Şc. Polit., Timişoara), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Vasu Vasile, Velicescu N. Nicolae* şi *Velicescu Titu.*

Observare. D-l. Mihăileanu N. (Lic., Constanţa) a observat că problema se poate generaliza şi pentru un poligon oarecare.

970. — *Din discuţia ecuaţiei în* x:

$$a x^2 - (a+3) x + 3 = y,$$

să se determine maximul sau minimul lui x, *a fiind un parametru variabil. Să se determine a astfel ca minimul lui* y *să fie egal cu* $-\frac{1}{8}$ *şi să se afle valoarea lui* x *corespunzătoare. Să se figureze curba reprezentativă a variaţiei lui* y, *fără derivate.*

N. ABRAMESCU

Expresiunea lui y se mai poate scrie sub formele:

$$y = a\left(x - \frac{a+3}{2a}\right)^2 - \frac{(a+3)^2 - 12a}{4a} =$$

$$(x-1)(ax-3)$$

Se observă: 1°. Dacă $a > 0$, funcţiunea y este minimă pentru, $x = \frac{a+3}{2a}$ şi acest minimum este, $\frac{(a-3)^2}{4a}$.

2°. Dacă $a < 0$, funcţiunea y este maximă pentru $x = \frac{a+3}{2a}$ şi acest maximum este $-\frac{(a-3)^3}{2a}$

Mai observăm încă în ambele cazuri că $y = 0$,

pentru $x=1$ şi $x=\frac{3}{a}$ şi că $y=3$ pentru $x=0$.

Pentru ca minimul lui y să fie $-\frac{1}{8}$ trebuie să avem:

$$\frac{(a-3)^2}{4a}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore \qquad 2a^2-13a+18=0,$$

de unde:

$$a=\frac{13\pm\sqrt{25}}{4},$$

deci:

$$a=2 \qquad \text{şi} \qquad a=\frac{9}{2}$$

In aceste cazuri putem construi următoarele tablouri de variaţie.

Pentru $a=2$, avem:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{5}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y	∞	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

Pentru $a=\frac{9}{2}$, avem:

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{6}$		1		$-\infty$
y	∞	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$-\frac{1}{8}$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

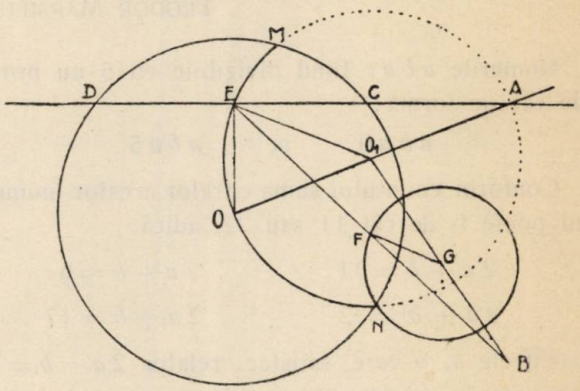
Reprezentarea grafică este acum foarte simplă.

Soluţii date de d-nii: *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic. Oltenita), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Popescu Ştefan* (Lic. Milit., Craiova) şi *Savovici Florentin* (Lic. Milit., Tg. Mureş).

994. — *Se dă cercul* O *şi două puncte fixe* A *şi* B. *Prin* A *se duce o secantă care taie cercul în* C *şi* D. *Se uneşte* B *cu mijlocul* E *al coardei* CD. *Se cere locul geometric al mijlocului lui* BE, *când secanta* ACD *variază.*

V. ALACI

Ducem secanta ACD şi fie E mijlocul coardei CD. Să căutăm întâi locul geometric al punctului E, când secanta ACD variază trecând necontenit prin A. Unind O cu E, observăm că triunghiul OED este dreptunghic şi cum OA este fixă, locul lui E este arcul MON al cercului O_1 cu diametru OA.



Să aflăm acum locul geometric al punctului F mijlocul lui BE, când E descrie arcul MON.

Punctul B fiind fix şi E descriind arcul de cerc MON al cercului O_1, evident că F mijlocul lui BE va descrie arcul omotetic corespunzător al cercului G, cercurile G şi O_1 având centru de omotetie în B şi raportul $\frac{1}{2}$. Centrul G este mijlocul lui O_1D.

Discuţie. In figură am presupus punctele fixe A şi B exterioare cercului O şi încă B exterior şi cercului O_1. Dacă A este pe cercul O, în interiorul lui sau chiar în O, atunci locul geometric a lui E este respectiv un cerc O_1, tangent în A, de diametru OA: un cerc O_1 interior cercului O de diametru OA sau se reduce numai la punctul O.

Acum dacă B se află pe cercul O_1, în interiorul lui sau chiar în O_1, locul geometric al lui F este respectiv un cerc G tangent cercului O_1 cu diametru O_1B; un cerc G interior lui O_1 de diametru O_1B sau un cerc concentric cu O_1, de rază jumătate cât el.

Soluţii date de d-nii: *Boeriu Valer* (Şcoala Poilit., Timişioara), *Cojocaru I. V.* (Lic., Braşov), *Ionescu Ştefan* (Liceul, Roman), *Jeba C. C-tin* (Şcoala Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Mănescu Mir-*

cea (Seminarul Pedagogic), *Mehedinți D.* (Lic. Milit., Tg.-Mureș), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanța) și *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanța).

Soluții analitice date de d-nii: Jeba C. C-tin (Șc. Polit., Timișoara) și *Mereuță Emilian* (student, București).

997. — *Se cer numerile a b a c divizibile cu 5 astfel ca suma cifrelor să ne dea un număr format cu cifre identice.*

TEODOR MARSIEU

Numerile $a\,b\,a\,c$ fiind divizibile cu 5 nu pot fi de cât de forma:

$$a\,b\,a\,0 \qquad \text{și} \qquad a\,b\,a\,5$$

Conform enunțului suma cifrelor acestor numere nu poate fi de cât 11 sau 22, adică:

$$2a+b=11 \qquad 2a+b=6$$

$$2a+b=22 \qquad 2a+b=17$$

Cifrele a, b care satisfac relația $2a+b=11$ și numerile $a\,b\,a\,0$ corespunzătoare, sunt:

a	b	$a\,b\,a\,0$
1	9	1910
2	7	2720
3	5	3530
4	3	4340
5	1	5150

Cifrele a, b care satisfac relația $2a+b=22$ și numerile $a\,b\,a\,0$ corespunzătoare, sunt:

a	b	$a\,b\,a\,0$
7	8	7870
8	6	8680
9	4	9490

Cifrele a, b care satisfac relația $2a+b=6$ și numerile $a\,b\,a\,5$ corespunzătoare, sunt:

a	b	$a\,b\,a\,0$
1	4	1415
2	2	2225
3	0	3035

In fine cifrele a, b care satisfac relația $2a+b=17$ și numerile $a\,b\,a\,5$ corespunzătoare, sunt:

a	b	$a\,b\,a\,5$
4	9	4945
5	7	5755
6	5	6565
7	3	7375
8	1	8185

Problema propusă are în total următoarele 16 soluții: 1415, 1910, 2225, 2720, 3035, 3530, 4340, 4945, 5150, 5755, 6565, 7375, 7870, 8185, 8680 și 9490.

Soluții complecte date de d-nii: *Boerescu G.* (Lic., Oltenița), *Cincilian Agop* (Balcic), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Gall Tica* (Șc. Milit. de Art.), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad) *Mereuță Emilian* (student, București), *Motoc D. Mircea* (Lic., Oltenița), *Popa Gh. Ioan* (Oltenița)' *Popescu C. Ștefan* (Lic. Milit., Craiova), *Purdilă A.* (Șc. Polit., Timișoara), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanța) și *Stan I. Joan* (Lic., Roman).

Au mai trimes soluții d-nii: *Mihăileanu N. N.* (15 soluții) *Weissman Mauriciu* (15 soluții), *Lupescu Gh. C-tin* (14 soluții), *Dumitrașcu N. Romeo* (13 soluții), *Manasiu E.* (13 soluții), *Nagler M.* (13 soluții), *Nicolaescu Stelian* (13 soluții), *Savovici Florentin* (13 soluții), *Mehedinți D.* (12 soluții),*Grinberg N. M.* (11 soluții), *Neufeld Pavel* (8 soluții) și *Margulius Marius* (4 soluții).

998. — *Să se descompună în factori suma:*

$$\Sigma x^3 y z - \Sigma x^2 y^2 + x y z - x^2 y^2 z^2$$

IOAN C. SAVIN

Insemnând cu S suma dată, putem scrie succesiv:

$$S = x y z - y^2 z^2 - z^2 x^2 + x y z^3 - x^2 y^2 + x y^3 z +$$

$$x^2 y z - x^2 y^2 z^2 = z(x y - y^2 z - z x^2 + x y z^2) -$$

$$x y (x y - y^2 z - z x^2 + x y z^2) =$$

$$(z - x y)(x y - y^2 z - z x^2 + x y z^2)$$

Mai putem scri încă mai departe:

$$S = (z - x y)[x(y - z x) - y z(y - z x)]$$

sau:

$$S = (x - y z)(y - z x)(z - x y)$$

Soluții date de d-nii: *Boeriu Valer* (Șc. Polit, Timișoara), *Cojocaru V. I.* (Lic, Brașov), *Curchi Ioan* (bacalaureat, Chișinău), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Dumitrașcu N. Romeo* (bacalaureat, Roman), *Grinberg N. Meer* (bacalaureat, Tighina), *Gall Tica* (Șc. Milit. de Artilerie), *Ioanin C. Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Ivănescu C.* (Bârlad), *Lupescu Gh. C-tin* (Roman), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihăileanu N. N.* (Lic, Constanța), *Parepeanu C. Ioan* (bacalaureat, Brașov), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Pănoiu Emanoil* (Lic. Carol, Craiova), *Popescu C. Ștefan* (Lic. Milit., Craiova), *Purdilă Anton* (Șc. Polit, Timișoara) și *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, București).

1004. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu se cere să să stabilească relația:*

$$s = \frac{4 R r (r_a + r_b + r_c)}{a \sec^2 \frac{A}{2} + b \sec^2 \frac{B}{2} + c \sec^2 \frac{C}{2}}$$

IOAN GH. POPA

Ținând seamă de relațiile cunoscute într'un triunghiu:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \qquad a = 2 R \sin A,$$

$$\sec \frac{A}{2} = \frac{1}{\cos \frac{A}{2}}, \qquad s = p r,$$

și analoagele lor, observăm ușor că:

$$a \sec^2 \frac{A}{2} = \frac{2 R \sin A}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{4 R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 4 R \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

și notând cu E membrul al 2-lea al relației date, putem scri succesiv:

$$E = \frac{4 R r \left(p \operatorname{tg} \frac{A}{2} + p \operatorname{tg} \frac{B}{2} + p \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right.}{4 R \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)} = p r = s,$$

adică tocmai relația dată.

Soluții date de d-nii: *Acikgheozian N.* (Lic. Spiru Haret, București), *Boieriu Valeriu* (Școala Politechnică Timișoara), *Cincilian Agop* (Balcic), *Cojocaru V. I.* (Lic., Brașov), *Dan Traian* (Beiuș), *Dăscălescu Hristache* (student, București), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Lupescu Gh. C.* (bacalaureat, Roman), *Margulius Marius* (Lic. Spiru Haret, București), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanța), *Motoc I. Mircea* (Lic., Oltenița), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Neufeld Pavel*, *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova). *Parepeanu C. Ioan* (Brașov), *Purdilă A* (Brașov) și *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanța).

1006. — *Să se demonstreze că numărul:*

$$N = 11\ldots1\,1288\ldots8896,$$

care are n cifre egale cu 1 și n — 1 egale cu 8, este patrat perfect.

SUB.-LT. A. I. STAN

Cifra 1 repetându-se de n ori, iar 8 de $n-1$ ori, numărul N are $2n+2$ cifre și el se poate descompune astfel:

$$N = \underbrace{11\ldots1}_{n}\,\underbrace{00\ldots0}_{n+2} + 2 \times 10^{n+1} +$$

$$8 \times \underbrace{11\ldots100}_{n+1} + 10 \times 9 + 6$$

care se mai poate scri:

$$N = 10^{2n+1} + 10^{2n} + \ldots + 10^{n+2} + 10^{n+1}) +$$

$$8 \times (10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10^2) + 10^{n+1} + 9 \times 10 + 6,$$

și efectuând sumele din paranteze care sunt niște progresiuni geometrice, avem succesiv:

$$N = \frac{10^{2n+2} - 10^{n+1}}{1} + 8 \frac{10^{n+1} - 10^2}{2} +$$

$$10^{n+1} + 9 \times 10 + 6 =$$

$$\frac{10^{2n+2}-10^{n+1}+8\times 10^{n+1}-8\times 10^{2}+9\times 10^{n+1}+8\times 10^{2}+10+54}{2}$$

sau:

$$N=\frac{10^{2(n+1)}+2\times 8\times 10^{n+1}+64}{9}=$$

$$\left(\frac{10^{n+1}+8}{3}\right)^{2}=\underbrace{(33\ldots 3}_{n-1}\,6)^{2}$$

Rezultă deci că N este patrat perfect.

Soluții date de d-nii: *Boerescu P. George* (Lic, Oltenița), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Mihăileanu N. N.* (Lic, Constanța), *Motoc D. Mircea* (Lic, Oltenița), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Pop Leontin* (Șc. Polit., Timișoara), *Purdilă Anton* (Șc. Polit., Timișoara) și *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanța).

1007. — *Să se rezolve sistemul*:

$$\begin{cases}\sqrt{x(y+2)}+\sqrt{y(x-2)}=2\\ (xy-2)^{2}+2xy(x-y)=5\end{cases}$$

TEODOR MARSIEU

Dezvoltând a 2-a ecuație, putem scri:

$$x^{2}y^{2}-4xy+4+2x^{2}y-2xy^{2}=5$$

$$\therefore\quad xy(xy-4+2x-2y)=1,$$

sau:

$$xy(x-2)(y+2)=1$$

Dacă notăm acum:

$$(2)\qquad \begin{cases}x(y+2)=u\\ y(x-2)=v\end{cases}$$

sistemul dat devine echivalent cu următorul:

$$\begin{cases}\sqrt{u}+\sqrt{v}=2\\ uv=1\end{cases}$$

Ridicând prima ecuație la patrat și ținând seama de a 2-a ecuație, deducem după simplificare:

$$\begin{cases}u+v=2\\ uv=1\end{cases}$$

u și v sunt astfel rădăcinele ecuației:

$$z^{2}-2z+1=0,$$

de unde deducem:

$$u=v=1$$

Sistemul (2) devine astfel:

$$(3)\qquad \begin{cases}x(y+2)=1\\ y(x-2)=1\end{cases}$$

Scăzând aceste relații, găsim:

$$x=-y,$$

Inlocuim pe x prin $-y$ în prima ecuație din (3) obținem:

$$y^{2}+2y+1=0$$

Deducem, $y=-1$ și deci $x=1$.

Rezultă dar că sistemul de soluții a sistemului de ecuații dat, este:

$$\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$$

Soluții date de d-nii: *Boieriu Valer* (Șc. Polit., Timișoara), *Chirilă Adrian* (Lic., Timișoara), *Cojocaru I.* (Lic., Brașov), *Cristalopol C. Ioan* (Școala Politechnică, Timișoara), *Curchi Ioan* bacalaureat, Chișinău), *Dumitrașcu N. Romeo* (bacalaureat, Roman), *Gall Tica* (Șc. Milit. de Artilerie), *Grinberg N. M.* (Tighina), *Iliescu M. E.* (Lic. Milit., Craiova), *Ivănescu Cezar* (Bârlad), *Jeba C. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat, Roman), *Manasiu N. D-tru* (Lic. Milit., Tg.-Mureș), *Mereuță Emiliau* (student, București), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanța), *Nicolesco Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Păsculescu M. Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Pop Leontin* (Șc. Polit., Timișoara), *Purdilă A.* (Șc. Polit., Timișoara), *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanța), *Savovici Florentin* (Lic., Milit., Tr.-Mureș), *Stan I.* (Lic., Roman) și *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanța).

1008. — *Să se rezolve în numere întregi, sistemul*:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{xz}+\dfrac{z}{xy}=\dfrac{67}{75}\\ (x+y)^{2}+(y+z)^{2}+(x+z)^{2}=458\\ (x+y+z)^{2}-x(y+z)-y(x+z)-z(x+y)=134\end{cases}$$

EMILIAN MEREUTA

Inmulțind prima ecuație cu xyz, dezvoltând și simplificând pe celelalte două, obținem sistemul:

$$\begin{cases}x^{2}+y^{2}+z^{2}=\dfrac{67}{75}xyz\\ x^{2}+y^{2}+z^{2}+xy+yz+zx=229\\ x^{2}+y^{2}+z^{2}=134\end{cases}$$

Prima şi a 2-a ecuaţie, în virtutea celei de a 3-a se simplifică, astfel că obţinem sistemul:

$$\begin{cases} xyz = 150 \\ xy + yz + zx = 95 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 134 \end{cases}$$

Ecuaţia a 3-a, în virtutea celei de a 2-a se poate scri:

$$(x + y + z)^2 - 2 \times 95 = 135$$

sau:

$$x + y + z = \pm\sqrt{324} = \pm 18$$

Avem astfel următorul sistem; echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} x + y + z = \pm 18 \\ xy + yz + zx = 95 \\ xyz = 150 \end{cases}$$

Având cunoscute suma lui x, y, z, produsul lor luate câte două şi produsul lor rezultă că x, y, z sunt rădăcinele ecuaţiei.

$$t^3 \mp 18\,t^2 + 95\,t - 150 = 0$$

Aci avem de fapt două ecuaţii, anume:

(1) $$t^3 - 18\,t^2 + 95\,t - 150 = 0$$

(2) $$t^3 + 18\,t^2 + 95\,t - 150 = 0$$

Pima ecuaţie anulând-se pentru $t = 3$, $t = 5$, $t = 10$ se poate scri:

$$t^3 - 18\,t^2 + 95\,t - 156 = (t-3)(t-5)(t-10) = 0,$$

deci avem pentru x, y, z următoarele şase sisteme de soluţii, pe care le scrim în următorul tablou:

x	3	3	5	5	10	10
y	5	10	3	10	3	5
z	10	5	10	3	5	3

Ecuaţia (2) se observă că nu admite rădăcini întregi cum cere enunţul, căci nici unul din divizorii lui 150 n'o verifică.

Singurele sisteme de soluţii pentru sistemul de ecuaţii dat, sunt deci numai acelea trecute în tablou.

Soluţii date de d-nii: *Boieriu Valer* (Şcoala Politechnică, Timişoara), *Boerescu P. George* (Lic., Oltenita), *Chirilă Andreiu* (Lic., Timişoara), *Cojocaru V. I.* (Lic., Braşov), *Cristalopol C. Ioan* (Şcoala Politechnică, Timişoara), *Curchi Ioan* (bacalaureat, Chişinău), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Dumitrescu N. Romeo* (bacalaureat, Roman), *Gall Tica* (Şc. Milit. de Artilerie), *Grinberg N. Meer* (bacalaureat, Tighina), *Goldner Silvian* (bacalaureat, Bucureşti), *Ioanin C. Gh.* (Lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Jeba C. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat, Roman), *Margilius Marius* (Lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihăileanu N. N.* (Lic., Constanţa), *Nagler Mayer* (Lic. Naţional, Iaşi), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Păsculescu N. Vasile* (Craiova), *Pop Leontin* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Purdilă A.* (Şc. Polit., Timişoara), *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanţa) şi *Weissman Mauriciu* (bacalaureat, Constanţa).

1011. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească identitatea:*

$$\sum\left(\sec\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) = \frac{r\sqrt{r}}{s}\sum r_a\sqrt{\frac{r_a}{bc}}$$

N. MIHAILEANU

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute într'un triunghiu:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$p = \frac{s}{r},\quad p - a = \frac{s}{r_a},\quad s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

putem scri succesiv:

$$\sec\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} - \cos\frac{A}{2} =$$

$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sin\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{\sqrt{p(-a)bc}} =$$

$$\frac{\frac{s^2}{p(p-a)}}{\sqrt{p(p-a)bc}} = \frac{1}{\frac{s}{r}\cdot\frac{s}{r_a}\sqrt{\frac{s}{r}\cdot\frac{s}{r_a}bc}} =$$

$$\frac{r r_a \sqrt{r r_a}}{s\sqrt{b c}}$$

De aci rezultă:

$$\sum\left(\sec\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)=\sum\frac{r r_a\sqrt{r r_a}}{s\sqrt{b c}}=$$

$$\frac{r\sqrt{r}}{s}\sum r_a\sqrt{\frac{r_a}{b c}}$$

Avem astfel stabilită identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Boieriu Valer* (Școala Politehnică, Timișoara), *Cojocaru V. I.* (Lic., Brașov), *Grinberg Meer* (bacalaureat, Tighina), *Ivănescu Cezar* (Lic., Bârlad), *Lupescu Gh C-tin* (bacalaureat, București), *Mereuță Emilian* (student, București), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Păsculescu M. Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Pop Leontin* (Șc. Polit., Timișoara), *Purdilă A.* (Șc. Polit., Timișoara) și *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanța).

PROBLEME PROPUSE

1047. — Să se găsească patratul perfect de forma $a\,b\,c\,d$ știind că numărul format de cifrele a treia și a patra e un patrat perfect și că numărul format de cifra întâia, a doua și a treia este iarăși un patrat perfect care are suma cifrelor sale egală cu cifra patra a patratului cerut.

MIRCEA CONSTANTINESCU

1048. — Să se găsească patratele perfecte de forma:

$$N = a\,8\,2\,b\,2\,c\,5$$

cară să fie multiple de 3 și 11; să se determine apoi baza sistemului de numerație în care numărul $a\,b\,c\,5$ este 5829.

C-TIN D. RUSU

1049. — Să se deducă din relațiile date:

$$\begin{cases} 21a+15b+10c+6d+3e+f=0 \\ 15a+10b+6c+3d+e=0 \\ 10a+6b+3c+d=0, \end{cases}$$

relațiile echivalente:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=0 \\ b+2c+3d+4e+5f=0 \\ c+3d+6e+10f=0 \end{cases}$$

V. ALACI

1050. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2+xy+yz+zx=12 \\ y^2+yz+zx+xy=15 \\ z^2+zx+xy+yz=20 \end{cases}$$

EM. PANOIU

1051. — Să se construiască triunghiul A B C cunoscând ortocentrul H, centrul O_1 al cercului celor nouă puncte și punctul A_1 diametral opus vârfului A în cercul circumscris.

CEZAR IVANESCU

1052. — Fie D și E picioarele bisectoarelor interioare și exterioare din A în triunghiul A B C. Fie O_1 și O'_1, centrele cercurilor ce trec prin A și tangente laturei B C respectiv în D și E.

1°. Să se demonstreze că cercurile O_1 și O'_1, sunt tangente între ele și tangente cercului O_1 circumscris lui A B C.

2°. Să se calculeze suma:

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{D_1O_1}\cdot\overline{E_1O'_1}}}+\frac{1}{\sqrt{\overline{D_2O_2}\cdot\overline{E_2O'_2}}}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{D_3O_3}\cdot\overline{E_3O'_2}}},$$

unde D_2, E_2 ; D_3, E ; O_2, O'_2 ; O_3, O'_3 sunt analoagele punctelor D_1, E_1, O_1 ; O'_1 pentru vârfurile B și C.

SUB.-LT. AURELIAN STAN

1053. — Să se rezolve ecuația:

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+\frac{1}{\operatorname{tg}x}=\frac{8}{1+\operatorname{tg}^2x}$$

SUB.-LT. ION C. VONICA

1054. — Să se facă calculabilă prin logaritmi, expresia:

$$\frac{\operatorname{tg}(b-c)}{\operatorname{tg}a}+\frac{\operatorname{tg}(c-a)}{\operatorname{tg}b}+\frac{\operatorname{tg}(a-b)}{\operatorname{tg}c}$$

CEZAR COSNITA

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek,* Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann,* La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale,* Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez,* Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell,* Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff,* Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera,* S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky,* Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler.* Washington (Statele Unite), *J. Shohat,* Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville,* Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault,* Le Mans (Francia), *O. Szász,* Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti,* Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți aceì corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa admi. nistrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngri. jire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XI. 15 DECEMVRIE 1931 NO. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CEZAR COSNITA PROPRIETATI IN LEGATURA CU UN SISTEM DE CERCURI
2. NOTE MATEMATICE: 23
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 764, 800, 812, 890, 893, 913
5. PROBLEME PROPUSE: 1055-1062
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**— profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Prof. **C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei.

ANUL XI — No. 10. TIMISOARA, 15 DECEMVRIE 1931

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

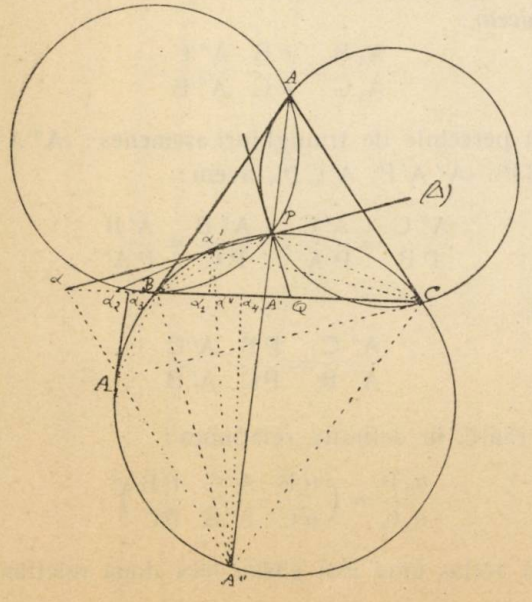
PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

PROPRIETĂȚI IN LEGĂTURĂ CU UN SISTEM DE CERCURI.

de CEZAR COSNITA

Fie ABC un triunghiu oarecare iar P un punct arbitrar în planul său. O transversală (Δ) trecând prin P întâlnește laturile triunghiului respectiv în α, β, γ, iar cercurile BPC, CPA, APB respectiv în α', β', γ'. Punctele α', β', γ' se proiectează pe laturile BC, CA, AB respectiv în $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, iar tangentele în α', β', γ' la cercurile corespunzătoare întâlnesc aceleași laturi respectiv în $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Dreptele AP, BP, CP tae laturile opuse în A', B', C', iar cercurile BPC, CPA, APB — a doua oară — respectiv în A'', B'', C''. Dreapta $A''\alpha'$ tae pe BC în α''; fie β'', γ'' punctele analoage. Dreapta $A''\alpha$ retae cercul BPC în A_1 iar tangenta în A_1 la acest cerc tae pe BC în α_3,; fie β_3, γ_3 punctele analoage. In sfârșit, fie α_4 proecția lui A'' pe BC, iar β_4, γ_4 celelalte două puncte analoage.



Aceste notații admise, să demonstrăm următoarele proprietăți ale figurii:

I) *Punctele* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *sunt colineare.*
II) *Punctele* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *sunt colineare.*
III) *Punctele* $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ *sunt colineare.*
IV) *Dreptele* $A\alpha_4$, $B\beta_4$, $C\gamma_4$ *sunt concurente.*
V) *Dreptele* $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ *sunt concurente.*

Soluțiune. Pe figură observăm că avem:

$$\alpha_1 B = \alpha' B \cos \widehat{\alpha' BC} \quad , \quad \alpha_1 C = \alpha' C \cos \widehat{\alpha' CB},$$

și cum:

$$\widehat{\alpha' BC} = 180^0 - \widehat{\alpha' PC} \quad , \quad \widehat{\alpha' CB} = \widehat{\alpha' PB},$$

deducem:

$$(1) \qquad \frac{\alpha_1 B}{\alpha_1 C} = -\frac{\alpha' B}{\alpha' C} \cdot \frac{\cos \widehat{\alpha' PC}}{\cos \widehat{\alpha' PB}}.$$

Ducem acum în P perpendiculara pe transversala (Δ), care tae pe BC în punctul Q, iar pe celelalte laturi CA, AB în R, S. Avem pe figură:

$$\widehat{\alpha' PC} = 90^0 + \widehat{QPC} \quad , \quad \widehat{\alpha' PB} = 90^0 - \widehat{QPB},$$

deci relația (1) se mai scrie:

$$(1') \qquad \frac{\alpha_1 B}{\alpha_1 C} = \frac{\alpha' B}{\alpha' C} \cdot \frac{\sin \widehat{QPC}}{\sin \widehat{QPB}}.$$

In triunghiurile QPC, QPB avem însă:

$$\frac{\sin \widehat{QPC}}{QC} = \frac{\sin \hat{Q}}{PC} \quad , \quad \frac{\sin \widehat{QPB}}{QB} = \frac{\sin \hat{Q}}{PB},$$

deci, prin împărțire, deducem:

$$\frac{\sin \widehat{QPC}}{\sin \widehat{QPB}} = \frac{QC}{QB} \cdot \frac{PB}{PC}.$$

Din triunghiurile $\alpha\alpha' B$, $\alpha\alpha' C$ deducem:

$$\frac{\alpha' B}{\sin\widehat{\alpha}} = \frac{\alpha B}{\sin\widehat{\alpha\alpha' B}} \quad , \quad \frac{\alpha' C}{\sin\widehat{\alpha}} = \frac{\alpha C}{\sin\widehat{\alpha\alpha' C}}$$

şi împărţind:

$$\frac{\alpha' B}{\alpha' C} = \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\sin\widehat{\alpha\alpha' C}}{\sin\widehat{\alpha\alpha' B}} .$$

Dar observăm că avem:

$$\widehat{\alpha\alpha' C} = 180^0 - \widehat{P\alpha' C} = 180^0 - \widehat{PBC}, \widehat{\alpha\alpha' B} = \widehat{PCB},$$

$$\frac{\sin\widehat{\alpha\alpha' C}}{\sin\widehat{\alpha\alpha' B}} = \frac{\sin\widehat{PBC}}{\sin\widehat{PCB}} = \frac{PC}{PB} .$$

In definitiv, relaţia (1') devine:

$$\frac{\alpha_1 B}{\alpha_1 C} = \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{QC}{QB} .$$

In mod analog demonstrăm relaţiunile:

$$\frac{\beta_1 C}{\beta_1 A} = \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{RA}{RC} \quad , \quad \frac{\gamma_1 A}{\gamma_1 B} = \frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{SB}{SA} .$$

Inmulţind aceste relaţii şi observând că avem:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = +1 \quad , \quad \frac{QC}{QB} \cdot \frac{RA}{RC} \cdot \frac{SB}{SA} = +1 ,$$

căci grupurile de puncte: (α, β, γ), (Q, R, S) sunt colineare, deducem:

$$\frac{\alpha_1 B}{\alpha_1 C} \cdot \frac{\beta_1 C}{\beta_1 A} \cdot \frac{\gamma_1 A}{\gamma_1 B} = +1 ,$$

deci punctele α_1, β_1, γ_1 sunt colineare.

Ca să dovedim că punctele α_2, β_2, γ_2 sunt colineare, ne servim de următoarea proprietate cunoscută:

„Tangenta într'unul din vârfurile unui triunghiu la cercul circumscris determină pe latura opusă segmente proporţionale cu patratele laturilor alăturate".

Conform acestei proprietăţi, avem:

$$\frac{\alpha_2 B}{\alpha_2 C} = \frac{\overline{\alpha' B}^2}{\overline{\alpha' C}^2} .$$

Dar am văzut mai sus că:

$$\frac{\alpha' B}{\alpha' C} = \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{PC}{PB} .$$

Deci avem relaţia:

$$\frac{\alpha_2 B}{\alpha_2 C} = \left(\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{PC}{PB}\right)^2$$

La fel avem încă două relaţii:

$$\frac{\beta_2 C}{\beta_2 A} = \left(\frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{PA}{PC}\right)^2 \quad , \quad \frac{\gamma_2 A}{\gamma_2 B} = \left(\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{PB}{PA}\right)$$

Inmulţind, deducem relaţia:

$$\frac{\alpha_2 B}{\alpha_2 C} \cdot \frac{\beta_2 C}{\beta_2 A} \cdot \frac{\gamma_2 A}{\gamma_2 B} = +1 ,$$

deci şi punctele α_2, β_2, γ_2 sunt colineare.

Să dovedim că punctele $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ sunt colineare.

Ne folosim tot de teorema tangentei, enunţată mai sus. Vom avea:

$$\frac{\alpha_3 B}{\alpha_3 C} = \frac{\overline{A_1 B}^2}{\overline{A_2 C}^2} .$$

In triunghiurile: $A_1 B\alpha$, $A_1 C\alpha$, avem:

$$\frac{A_1 B}{\sin\widehat{\alpha}} = \frac{\alpha B}{\sin\widehat{BA_1\alpha}} \quad , \quad \frac{A_1 C}{\sin\widehat{\alpha}} = \frac{\alpha C}{\sin\widehat{CA_1\alpha}} .$$

Impărţind aceste două relaţii şi observând că:

$$\widehat{BA_1\alpha} = \widehat{BCA''} \quad , \quad \widehat{CA_1\alpha} = 180^0 - \widehat{CBA''} ,$$

$$\frac{\sin\widehat{CA_1\alpha}}{\sin\widehat{BA_2\alpha}} = \frac{\sin\widehat{CBA''}}{\sin\widehat{BCA''}} = \frac{A''C}{A''B} ,$$

deducem:

$$\frac{A_1 B}{A_1 C} = \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{A''C}{A''B} .$$

In perechile de triunghiuri asemenea: (A'' A' C, A' B P), (A'' A' B, A' C P), avem:

$$\frac{A''C}{PB} = \frac{A'C}{PA'} \quad , \quad \frac{A''B}{PC} = \frac{A'B}{PA'} ,$$

deci:

$$\frac{A''C}{A''B} = \frac{PB}{PC} \cdot \frac{A'C}{A'B} .$$

Rezultă în definitiv relaţiunea:

$$\frac{\alpha_3 B}{\alpha_3 C} = \left(\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{PB}{PC}\right)^2 .$$

In acelaş mod mai găsim încă două relaţiuni:

$$\frac{\beta_3 C}{\beta_3 A}=\left(\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{PC}{PA}\right)^2,\quad \frac{\gamma_3 A}{\gamma_3 B}=\left(\frac{\gamma A}{\gamma B}\cdot\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{PA}{PB}\right)^2.$$

Inmulțind aceste trei relații și observând că:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=-1\ ,$$

fiindcă AA', BB', CC' sunt concurente, deducem:

$$\frac{\alpha_3 B}{\alpha_3 C}\cdot\frac{\beta_3 C}{\beta_3 A}\cdot\frac{\gamma_3 A}{\gamma_3 B}=+1\ ,$$

deci punctele α_3, β_3, γ_3 sunt colineare.

Să arătăm că dreptele $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ sunt concurente. In perechile de triunghiuri asemenea: $(\alpha'\alpha''B,\ \alpha''A''C)$, $(\alpha'\alpha''C,\ \alpha''A''B)$ avem:

$$\frac{\alpha''B}{\alpha''A''}=\frac{\alpha'B}{A''C}\ ,\quad \frac{\alpha''C}{\alpha''A''}=\frac{\alpha'C}{A''B}\ ;$$

împărțind, avem:

$$\frac{\alpha''B}{\alpha''C}=\frac{\alpha'B}{\alpha'C}\cdot\frac{A''B}{A''C}.$$

Dar am văzut mai sus că:

$$\frac{\alpha'B}{\alpha'C}=\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{PC}{PB}\ ,\quad \frac{A''B}{A''C}=\frac{PC}{PB}\cdot\frac{A'B}{A'C}.$$

Deci avem relația:

$$\frac{\alpha''B}{\alpha''C}=\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{\overline{PC}^2}{\overline{PB}^2}$$

Considerăm și relațiile analoage:

$$\frac{\beta''C}{\beta''A}=\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PC}^2}\ ,\quad \frac{\gamma''A}{\gamma''B}=\frac{\gamma A}{\gamma B}\cdot\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PA}^2}.$$

Inmulțind, avem:

$$\frac{\alpha''B}{\alpha''C}\cdot\frac{\beta''C}{\beta''A}\cdot\frac{\gamma''A}{\gamma''B}=-1\ ,$$

deci dreptele $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ sunt concurente.

Să dovedim în fine că și dreptele: $A\alpha_4$, $B\beta_4$, $C\gamma_4$ sunt concurente.

Avem pe figură:

$$\alpha_4 B=A''B\cos\widehat{A''BC}=A''B\cos\widehat{A'PC}\ ,$$

$$\alpha_4 C=A''C\cos\widehat{A'PB}.$$

Deci:

$$\frac{\alpha_4 B}{\alpha_4 C}=\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{\cos\widehat{A'PC}}{\cos\widehat{A'PB}}=\frac{PC}{PB}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{\cos\widehat{A'PC}}{\cos\widehat{A'PB}}.$$

La fel deducem relațiile analoage:

$$\frac{\beta_4 C}{\beta_4 A}=\frac{PA}{PC}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{\cos\widehat{B'PA}}{\cos\widehat{B'PC}}\ ,$$

$$\frac{\gamma_4 A}{\gamma_4 B}=\frac{PB}{PA}\cdot\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{\cos\widehat{C'PB}}{\cos\widehat{C'PA}}.$$

Inmulțind aceste relații și observând că avem:

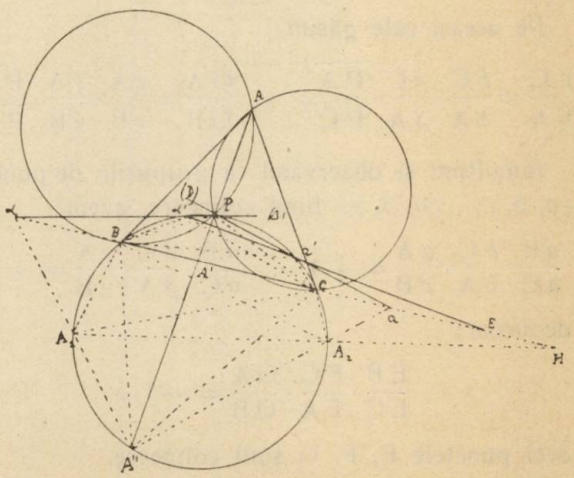
$$\widehat{A'PC}=\widehat{C'PA}\ ,\ \widehat{A'PB}=\widehat{B'PA}\ ,\ \widehat{B'PC}=\widehat{C'PB},$$

avem:

$$\frac{\alpha_4 B}{\alpha_4 C}\cdot\frac{\beta_4 C}{\beta_4 A}\cdot\frac{\gamma_4 A}{\gamma_4 B}=-1\ ,$$

deci și dreptele $A\alpha_4$, $B\beta_4$, $C\gamma_4$ sunt concurente.

Acum să mai ducem prin P o transversală oarecare (D) care întâlnește laturile triunghiului respectiv în a, b, c, iar cercurile BPC, CPA, APB în a', b', c'. Dreapta $a'\alpha'$ taie pe BC în E; fie F, G punctele analoage. Dreapta $a A''$ taie cercul BPC în A_2, iar dreapta A_1A_2 taie pe BC în H; fie I, J punctele analoage.



Să demonstăm următoarele proprietăți:

VI) *Punctele* E, F, G *sunt colineare.*

VII) *Punctele* H, I, J *sunt colineare.*

Soluțiune: In triunghiurile EBa', ECa' avem relațiile:

$$\frac{EB}{\sin \widehat{E a' B}} = \frac{a'B}{\sin \hat{E}} \quad , \quad \frac{EC}{\sin \widehat{E a' C}} = \frac{a'C}{\sin \hat{E}} .$$

Impărţind aceste două relaţii şi observând că:

$$\widehat{E a' B} = 180^0 - \widehat{B a' a'} = 180^0 - \widehat{BC\alpha'} ,$$

$$\widehat{E a' C} = \widehat{CB\alpha'},$$

$$\frac{\sin \widehat{E a' B}}{\sin \widehat{E a' C}} = \frac{\sin \widehat{BC\alpha'}}{\sin \widehat{CB\alpha'}} = \frac{\alpha' B}{\alpha' C},$$

deducem:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{a'B}{a'C} \cdot \frac{\alpha' B}{\alpha' C} .$$

Dar am găsit mai sus:

$$\frac{\alpha' B}{\alpha' C} = \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{PC}{PB} ;$$

la fel găsim:

$$\frac{a'B}{a'C} = \frac{aB}{aC} \cdot \frac{PC}{PB} .$$

Deci:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{aB}{aC} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\overline{PC}^2}{\overline{PB}^2} .$$

Pe aceaşi cale găsim:

$$\frac{FC}{FA} = \frac{bC}{bA} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\overline{PA}^2}{\overline{PC}^2} \quad , \quad \frac{GA}{GB} = \frac{cA}{cB} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PA}^2} .$$

Inmulţind şi observând că grupurile de puncte: (a, b, c), (α, β, γ) fiind colineare, avem:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1 \quad , \quad \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = +1 ,$$

deducem:

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{GA}{GB} = +1 ,$$

deci punctele E, F, G sunt colineare.

Observăm acum că din triunghiurile: HBA_2, HCA_2 avem:

$$\frac{HB}{\sin \widehat{H A_2 B}} = \frac{A_2 B}{\sin \hat{H}} \quad , \quad \frac{HC}{\sin \widehat{H A_2 C}} = \frac{A_2 C}{\sin \hat{H}} .$$

Impărţim aceste două relaţii şi observăm că:

$$\widehat{H A_2 B} = 180^0 - \widehat{B A_2 A_1} = 180^0 - \widehat{BC A_1} ,$$

$$\widehat{H A_2 C} = \widehat{CB A_1} ,$$

$$\frac{\sin \widehat{H A_2 B}}{\sin \widehat{H A_2 C}} = \frac{A_1 B}{A_1 C} ;$$

deducem:

$$\frac{HB}{HC} = \frac{A_1 B}{A_1 C} \cdot \frac{A_2 B}{A_2 C} .$$

Dar am văzut că:

$$\frac{A_1 B}{A_1 C} = \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{PB}{PC}$$

şi la fel deducem:

$$\frac{A_2 B}{A_2 C} = \frac{a B}{a C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{PB}{PC} .$$

Deci:

$$\frac{HB}{HC} = \frac{aB}{aC} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\overline{A'C}^2}{\overline{A'B}^2} \cdot \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PC}^2} .$$

In mod analog găsim:

$$\frac{IC}{IA} = \frac{bC}{bA} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\overline{B'A}^2}{\overline{B'C}^2} \cdot \frac{\overline{PC}^2}{\overline{PA}^2} ,$$

$$\frac{JA}{JB} = \frac{cA}{cB} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{\overline{C'B}^2}{\overline{C'A}^2} \cdot \frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} .$$

Inmulţind, găsim:

$$\frac{HB}{HC} \cdot \frac{IC}{IA} \cdot \frac{JA}{JB} = +1 ,$$

deci şi punctele H, I, J sunt colineare.

Figura mai are o mulţime de alte proprietăţi interesante cari ar putea forma un material bogat pentru cercetorii în „Geometria Triunghiului". Eu am semnalat mai sus unele proprietăţi cari sunt mai vizibile. Dealtfel scopul acestui articol a fost să generalizeze unele rezultate stabilite indirect de d. *M. Grünbaum* în „*Gazeta Matematică*" (vol. XXXI, 6) în articolul „*Câteva teoreme în legătură cu cercurile tritangente*". Se poate vedea, în adevăr, că proprietăţile I, II, VI generalizează primele 3 proprietăţi din articolul menţionat.

Ar fi interesant de particularizat punctul P din

proprietăţile precedente, făcându-l să coincidă cu diferite puncte remarcabile din triunghiu. Deasemenea e interesant de transformat prin *inversiune* sau prin *polare reciproce*, aceste proprietăţi.

Dau mai jos câteva proprietăţi obţinute prin *polare reciproce* din proprietăţile precedente.

Să presupunem că am ales ca centru al cercului director chiar punctul P. Atunci cele 3 cercuri: BPC, CPA, APB devin 3 parabole: (T_a), (T_b), (T_c), cari admit punctul P ca focar comun şi sunt tangente la câte 2 laturi ale triunghiului, de exemplu (T_a) e tangentă laturilor AB, AC. O dreaptă care trece prin P se transformă într'un punct la infinit şi decl punctele în cari dreapta tăia cele 3 cercuri se transformă în 3 tangente la cele 3 parabole, paralele cu o direcţiune dată. Dreptele AP, BP, CP se transformă în punctele dela Infinit depe laturile triunghiului.

Aceste lucruri amintite, să transformăm câteva din proprietăţile precedente.

Proprietatea I devine:

Se duc 3 tangente paralele cu o direcţiune dată la cele 3 parabole. Perpendicularele în P *pe dreptele* AP, BP, CP *întâlnesc tangentele corespunzătoare respectiv în* A′, B′, C′.

Dreptele: AA′, BB′, CC′ *sunt concurente.*

Proprietatea II devine:

Fie T_a, T_b, T_c *punctele de contact ale tangentelor paralele cu o direcţiune dată, la cele 3 parabole.*

Draptele: AT_a, BT_b, CT_c *sunt concurente.*

Proprietatea V devine:

Se duc la cele 3 parabole tangente paralele cu o direcţiune dată precum şi tangente paralele cu laturile triunghiului. Cele 2 tangente duse la (T_a) *se tae în* A″; *fie* B″, C″ *punctele analoage.*

Dreptele AA″, BB″, CC″, *tae pe* BC, CA, AB *în 3 puncte colineare.*

In acelaş mod se pot transforma şi celelalte proprietăţi.

NOTE MATEMATICE

23. — *O metodă pentru însumarea unor expresiuni algebrice.*

Să considerăm egalitatea evidentă:

$$\sum_{k=1}^{n} \log \frac{x+k}{x+k+1} = \log \frac{x+1}{x+n+1}$$

Derivând în ambii membri în raport cu x, obţinem egalitatea:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{n}{(x+1)(x+n+1}$$

Dacă facem aci $x=0$, găsim suma expresiunei:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Pentru $n=\infty$ avem suma seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Derivând încă odată ambii membri ai egalităţii (1), primim egalitatea:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{2x+2k+1}{(x+k)^2(x+k+1)^2} = \frac{n(2x+n+2)}{(x+1)^2(x+n+1)^2}$$

Pentru $x=0$ avem calculată suma:

$$\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

iar pentru $n=\infty$ avem suma seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \lim_{n=\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1$$

Am putea deriva din nou egalitatea (2) şi am putea obţine astfel alte sume. Să considerăm însă altă egalitate şi anume:

$$\sum_{k=1}^{n} \log \frac{x+k-1}{x+k+1} = \log \frac{x(x+1)}{(x+n)(x+n+1)}$$

Derivând ambii membri, găsim egalitatea:

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k-1)(x+k+1)} = \frac{n[2x^2+2x(n+1)+n+1]}{2x(x+1)(x+n)(x+n+1)}$$

Pentru $x=1$ obţinem suma expresiei:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} =$$

$$\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)},$$

iar pentru $n=\infty$ avem suma seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{n=\infty}\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{3}{4}$$

Dacă am considera încă alte egalităţi de felul celor două considerate şi raţionând în mod analog, am da peste alte sume şi serii de felul celor găsite. Metoda însă e mult mai interesantă pentru expresiunile trigonometrice. Iată de exemplu ne punem problema insumării expresiunilor următoare:

$$\frac{1}{\cos\alpha\ \cos 2\alpha}+\frac{1}{\cos 2\alpha\ \cos 3\alpha}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\cos n\alpha\ \cos(n+1)\alpha}$$

$$\frac{1}{\sin\alpha\ \sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha\ \sin 3\alpha}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\sin n\alpha\ \sin(n+1)\alpha}$$

Pentru însumarea celei dintâi să considerăm egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n}\log\frac{\cos(x+k)\alpha}{\cos(x+k+1)\alpha}=\log\frac{\cos(x+1)\alpha}{\cos(x+n+1)\alpha}$$

Derivând ambii membri a acestei egalităţi în raport cu x şi făcând simplificarea cu α, obţinem egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\alpha}{\cos(x+k)\alpha\ \cos(x+k+1)\alpha}=$$

$$\frac{\sin n\alpha}{\cos(x+1)\alpha\ \cos(x+n+1)\alpha}$$

Făcând aci $x=0$, împărţind ambii membri cu $\sin\alpha$ şi scriind suma explicit, avem:

$$(4)\qquad \frac{1}{\cos\alpha\ \cos 2\alpha}+\frac{1}{\cos 2\alpha\ \cos 3\alpha}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\cos n\alpha\ \cos(n+1)\alpha}=\frac{2\sin n\alpha}{\sin 2\alpha\ \cos(n+1)\alpha}$$

şi astfel avem însumată prima din expresiuni.

Pentru a doua considerăm egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n}\log\frac{\sin(x+k)\alpha}{\sin(x+k+1)\alpha}=\log\frac{\sin(x+1)\alpha}{\sin(x+n+1)\alpha}$$

Derivând ambii membri în raport cu x, avem după simplificarea cu α.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\alpha}{\sin(x+k)\alpha\ \sin(x+k+1)\alpha}=$$

$$\frac{\sin n\alpha}{\sin(x+1)\alpha\ \sin(x+n+1)\alpha}$$

Făcând şi aci $x=0$, împărţind ambii membri cu $\sin\alpha$, avem şi suma expresiunei a doua:

$$(5)\qquad \frac{1}{\sin\alpha\ \sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha\ \sin 3\alpha}+\cdots+$$

$$\frac{1}{\sin n\alpha\ \sin(n+1)\alpha}=\frac{\sin n\alpha}{\sin^2\alpha\ \sin(n+1)\alpha}$$

In mod analog, plecând dela egalităţile:

$$\sum_{k=1}^{n}\log\frac{\cos(x+k)\alpha}{\cos(x+k+2)\alpha}=$$

$$\log\frac{\cos(x+1)\alpha\ \cos(x+2)\alpha}{\cos(x+n+1)\alpha\ \cos(x+n+2)\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\log\frac{\sin(x+k)\alpha}{\sin(x+k+2)\alpha}=$$

$$\log\frac{\sin(x+1)\alpha\ \sin(x+2)\alpha}{\sin(x+n+1)\alpha\ \sin(x+n+2)\alpha}$$

se capătă însumarea expresiunilor:

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos 3\alpha}+\frac{1}{\cos 2\alpha\ \cos 4\alpha}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\cos n\alpha\ \cos(n+2)\alpha}=\frac{\sin n\alpha}{\sin 2\alpha}\times$$

$$\left[\frac{1}{\cos\alpha\ \cos(n+1)\alpha}+\frac{1}{\cos 2\alpha\ \cos(n+2)\alpha}\right]$$

$$\frac{1}{\sin\alpha\sin 3\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha\ \sin 4\alpha}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\sin n\alpha\ \sin(n+2)\alpha}=\frac{\sin n\alpha}{\sin 2\alpha}\times$$

$$\left[\frac{1}{\sin\alpha\ \sin(n+1)\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha\ \sin(n+2)\alpha}\right]$$

De asemenea dacă plecăm dela egalităţile următoare:

$$\sum_{k=1}^{n} \log \frac{\cos\left(x+\frac{1}{k}\right)\alpha}{\cos\left(x+\frac{1}{k+1}\right)\alpha} = \log \frac{\cos(x+1)\alpha}{\cos\left(x+\frac{1}{n+1}\right)\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \log \frac{\sin\left(x+\frac{1}{k}\right)\alpha}{\sin\left(x+\frac{1}{k+1}\right)\alpha} = \log \frac{\sin(x+1)\alpha}{\sin\left(x+\frac{1}{n+1}\right)\alpha}$$

ajungem la sumele:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{1.2}}{\cos\frac{\alpha}{1}\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2.3}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{3}} + \cdots$$

$$+ \frac{\sin\frac{\alpha}{n(n+1)}}{\cos\frac{\alpha}{n}\cos\frac{\alpha}{n+1}} = \frac{\sin\frac{n\alpha}{n+1}}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{n+1}}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{1.2}}{\sin\frac{\alpha}{1}\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2.3}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{3}} + \cdots$$

$$+ \frac{\sin\frac{\alpha}{n(n+1)}}{\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha}{n+1}} = \frac{\sin\frac{n\alpha}{n+1}}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{n+1}}$$

Din exemplele tratate se vede că metoda nu presintă nici o greutate şi cu ajutorul ei se pot însuma o mulţime de expresiuni algebrice şi trigonometrice.

TEODOR MARSIEU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVII, No. 3, Noemvrie 1931. Articol de geometrie, de *D. Barbilian.*

2. *Revista de Ciencias*, anul XXXIV, Iulie 1930 până la Iunie 1931. (Lima-Peru.)

Metrica într'un spaţiu multiplu, de *Dr. Ing. Godofredo Garcia.* Asupra problemei lui *Cauchy* pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de primul ordin, de *Dr. Alfredo Rosenblat.* Dinamica punctului material, de *Dr. Ing. Godofredo Garcia.*

3. *Boletin Matematico*, anul IV Noembrie 1931. O teoremă de însumare a seriilor neconvergente, de *A. Selzer.* Chestiuni importante din geometria triunghiului în legătură cu cercurile tritagente, de *M. Grünbaum.*

PROBLEME REZOLVATE

764. — *Să se stabilească identităţile:*

$$\frac{1}{(1+i)^n} + \frac{e^{2ix}}{(1-i)^n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} e^{ix} \cos\left(x - \frac{3n\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{(1+i)^n} - \frac{e^{2ix}}{(1-i)^n} = \frac{(-1)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2})^{n-2}} e^{ix} \sin\left(x - \frac{3n\pi}{4}\right),$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

V. ALACI

Ţinând seamă de formulele lui *Euler* şi *Moivre*, putem scri succesiv:

$$e^{\frac{3in\pi}{4}} = \cos\frac{3n\pi}{4} + i\sin\frac{3n\pi}{4} =$$

$$\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^n = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (1-i)^n$$

$$e^{\frac{-3in\pi}{4}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (1+i)^n$$

De aci deducem:

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{\frac{3in\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{(1-i)^n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{\frac{-3in\pi}{4}}$$

Inmulţind aceste relaţii prima cu e^{-ix} şi a 2^a cu e^{ix}, apoi adunându-le şi scăzându-le obţinem:

$$\frac{e^{-ix}}{(1+i)^n} - \frac{e^{ix}}{(1-i)^n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times$$

$$\left[e^{i\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)}\right]$$

$$\frac{e^{-ix}}{(1+i)^n} - \frac{e^{ix}}{(1-i)^n} = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times$$

$$\left[e^{i\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)}\right]$$

Inmulţind ambii membri a acestor egalităţi cu e^{ix} şi ţinând seamă de formulele lui *Euler*:

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha\,, \quad e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha =$$

$$2(-1)^{\frac{1}{2}}\sin\alpha\,,$$

putem scri:

$$\frac{1}{(1+i)^n}+\frac{e^{2ix}}{(1-i)^n}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}e^{ix}\cos\left(x-\frac{3n\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{(1+i)^n}-\frac{e^{2ix}}{(1-i)^n}=\frac{(-1)^n\,\frac{1}{2}}{(\sqrt{2})^{n-2}}e^{ix}\sin\left(x-\frac{3n\pi}{4}\right),$$

care sunnt tocmai identităţile cerute.

Soluţii date de d-nii: *Cazanachi P.* (Universitatea din Iaşi), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti) *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Negrea A. Leonte Mircea* (bacalaureat, Brăila).

A verificat identităţile date. d-l *Ignat I. Carp* (Chişinău).

800. — *Se cere maximul expresiei:*

$$E=xt-yz\ ,$$

ştiind că variabilele reale x, y, z, t *satisfac relaţiile:*

$$x^2+y^2=A\quad,\quad z^2+t^2=B$$

V. ALACI

Observăm că avem:

$$(1)\quad (xt-yz)^2=(x^2+y^2)(z^2+t^2)-(xz+yt)^2$$

In virtutea relaţiilor la care satisfac variabilele x, y, z, t, putem scri:

$$E=\pm\sqrt{AB-(xz+yt)^2}$$

E uşor de văzut că maximul lui E are loc când avem relaţia:

$$xz+yt=0$$

Maximul lui E este $\sqrt{AB}$, adică

$$E_M=\sqrt{AB}.$$

Soluţii date de d-nii: *Grecu M. Hristache* (lic., Oltenita), *Ionescu P. Haralamb* (Oltenita), *Ionescu Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit., de Geniu), *Mihăileanu N.* (lic., Constanţa), *Murăroiu I.* (bacalaureat, Braşov) şi *Vâlceanu N. Iustin* (Şc. Polit., Timişoara).

Altă soluţie. Din cauza relaţiilor de legătură, putem privi pe E ca funcţie numai de x şi t; x intră direct şi prin intermediul lui y şi t intră direct şi prin intermediul lui z. Fiindcă E este funcţie de 2 variabile, ii vom anula derivatele parţiale şi avem:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial x}=t-z\dfrac{dy}{dx}=0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial t}=x-y\dfrac{dz}{dt}=0 \end{cases}$$

$\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{dz}{dt}$ le aflăm derivând relaţiile de legătură, prima în raport cu x şi a 2^a în raport cu t, avem:

$$x+y\frac{dy}{dx}=0\quad,\quad t+z\frac{dz}{dt}=0$$

Scoţând de aci valorile lui $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{dz}{dt}$ şi înlocuindu-le în (1), ambele ecuaţii din (1) se reduc la ecuaţia:

$$xt+yz=0$$

Valorile variabilelor, care pot face pe E maxim sau minim satisfac deci sistemul:

$$\begin{cases} x^2+y^2=A \\ z^2+t^2=B \\ xt+yz=0 \end{cases},$$

care se mai poate scri:

$$\begin{cases} x^2+y^2=A \\ z^2+t^2=B \\ \dfrac{x}{t}=-\dfrac{y}{z}=\pm\sqrt{\dfrac{A}{B}} \end{cases}$$

Mai putem scri:

$$\begin{cases} x^2+y^2=A \\ z^2+t^2=B \\ \dfrac{xt}{t^2}=-\dfrac{yz}{z^2}=\dfrac{xt-yz}{B}=\pm\sqrt{\dfrac{A}{B}} \end{cases}$$

De aci rezultă:

$$E=\pm\sqrt{AB}$$

şi deci:

$$\text{Maxim } E=\sqrt{AB}$$

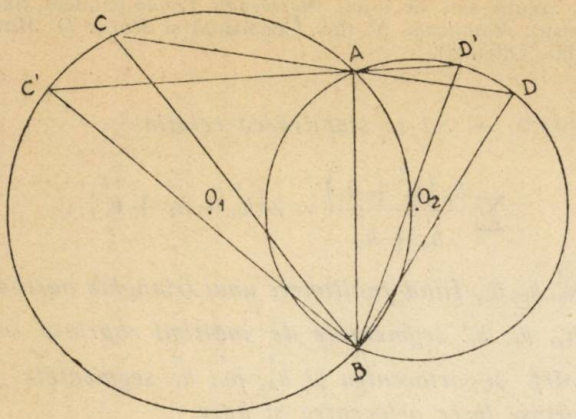
812. — *Două cercuri* O_1 *şi* O_2 *se intersectează în* A *şi* B. *Să se demonstreze că dacă se poate duce o secantă* A C D *aşa fel ca* B C = C D, *atunci această egalitate are loc pentru orice secantă dusă prin* A *(respectiv prin* B).

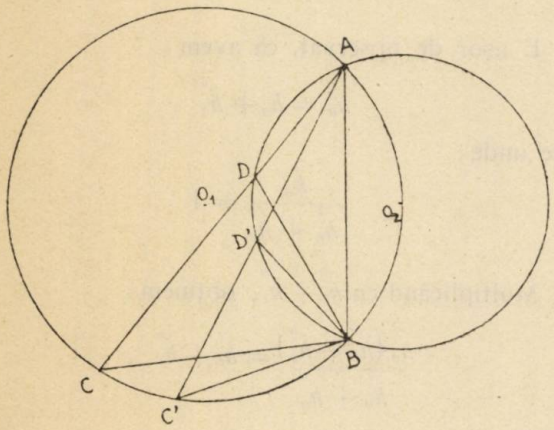
ION PROTOPOPESCU

Luăm un cerc oarecare O_1 şi coardele A B şi B C. Pe A C luăm un punct D astfel ca B C = C D.

Prin punctele A, B, D construim un cerc O_2.

In cercurile O_1 şi O_2 astfel construite, obser-





văm că secanta A C D dusă prin A, satisface condiția:

$$BC = CD.$$

Ducând prin A o altă secantă oarecare A C′ D′, observăm că triunghiurile B C′ D′ și B C D sunt asemenea, căci au:

$$\hat{C'} = \hat{C}$$

ca fiind înscrise în același segment A C B a cercului O_1, și

$$\hat{D'} = \hat{D},$$

ca fiind înscrise în același segment de cerc A D B a cercului O_2 (În cazul figurei a 2ª suplimentele lor sunt înscrise în același segment).

Triunghiurile B C′ D′ și B C D fiind asemenea, cum al 2-lea este isoscel prin construcție, rezultă că și primul este isoscel, adică:

$$BC' = C'D'$$

Soluții date de d-nii: *Grecu M. Cristache* (lic, Oltenița), *Ionescu P. Haralamb* (Oltenița), *Ionescu Țiu D. C-tin* (Șc. Milit., de Geniu), *Marineanu Traian* (student, București), *Mărgineanu Ion* (a dat o soluție analitică), *Mihăileanu N. N.* (lic., Constanța), *Popa Gh. Ion* (lic., Oltenița), *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanța), *Schuler David* (absolvent, Bacău) și *Vâlceanu N. Iustin* (Șc. Polit., Timișoara).

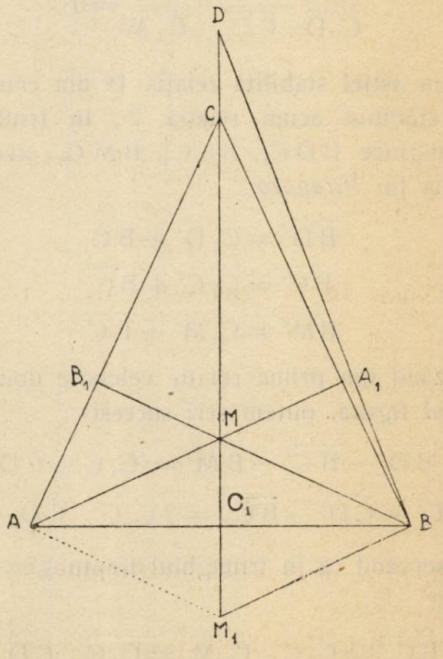
890.*) — *Fie* A_1, B_1, C_1, *picioarele înălțimelor triunghiului isoscel* A B C (A C = C B), *iar* M *punctul lor de intersecție. Se prelungește* $C_1 C$ *cu o cantitate* $CD = C_1 M_1$. *Să se arate că:*

1°. $$\frac{\overline{BC} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{BC_1}}{\overline{C_1 D} \cdot \overline{C_1 C} \cdot \overline{C_1 M}} = 1$$

1°. $$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{BC_1}^2$$

ION MARGINEANU

Fie C vârful triunghiului isoscel dat și M punctul de intersecție al înălțimelor CC_1, AA_1, BB_1. Prelungim pe $C_1 C$ cu $CD = C_1 M$ și unim B cu D.



Dacă acum prelungim pe MC_1 cu $C_1 M_1 = MC_1$, observăm că figura A M B M_1 este un romb, deci $M_1 B$ este paralelă cu A M, adică perpendiculară pe B C.

Triunghiul B C M_1 este astfel dreptunghic și re-

*) Enunț rectificat.

laţiile cunoscute într'un triunghiu dreptunghic, ne permit a scri:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CM_1} \cdot \overline{CC_1}$$
$$\overline{BM_1}^2 = \overline{CM_1} \cdot \overline{C_1M}$$
$$\overline{BC_1}^2 = \overline{CC_1} \cdot \overline{C_1M}$$

Inmulţind aceste relaţii, obţinem:

$$\overline{BC}^2 \cdot \overline{BM_1}^2 \cdot \overline{BC_1}^2 = \overline{CM_1}^2 \cdot \overline{CC_1}^2 \cdot \overline{C_1M_1}^2 ,$$

de unde deducem:

$$(1) \qquad \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BM_1} \cdot \overline{BC_1}}{\overline{CM_1} \cdot \overline{CC_1} \cdot \overline{C_1M_1}} = 1 .$$

Observând însă că avem:

$$\overline{BM_1} = \overline{BM} , \ \overline{CM_1} = \overline{C_1D} , \ \overline{C_1M_1} = \overline{C_1M} ,$$

relaţia (1) devine:

$$\frac{\overline{BC} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{BC_1}}{\overline{C_1D} \cdot \overline{CC_1} \cdot \overline{C_1M}} = 1 .$$

Avem astfel stabilită relaţia 1° din enunţ.

Să stabilim acum relaţia 2°. In triunghiurile dreptunghice BDC_1, BCC_1, BMC_1, avem după teorema lui *Pitagora:*

$$\overline{BD}^2 = \overline{C_1D}^2 + \overline{BC_1}^2$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{C_1C}^2 + \overline{BC_1}^2$$
$$\overline{BM}^2 = \overline{C_1M}^2 + \overline{BC_1}^2$$

Scăzând din prima relaţie celelalte două şi observând figura, putem scri succesiv:

$$(2) \qquad \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{BM}^2 = (\overline{C_1C} + \overline{CD})^2 -$$
$$\overline{C_1C}^2 - \overline{CD}^2 - \overline{BC_1}^2 = 2\,\overline{C_1C} \cdot \overline{CD} - \overline{BC_1}^2$$

Observând că în triunghiul dreptunghic BCM_1, avem:

$$\overline{BC_1}^2 = \overline{C_1C} \cdot \overline{C_1M_1} = \overline{C_1C} \cdot \overline{CD} ,$$

relaţia (2) devine:

$$\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{BC_1}^2 ,$$

de unde:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{BC_1}^2 ,$$

care este tocmai relaţia 2°.

Soluţii date de d-nii: *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N.* (lic., Constanţa) şi *Motoc D. Mircea* (lic., Oltenita).

893 *). — *Să se stabilească relaţia:*

$$\sum \frac{h_a (h_b'' + h_c'')}{h_a' + h_a''} = 2 (h_a'' + h_b'' + h_c'') ,$$

h_a, h_b, h_c, fiind înălţimile unui triunghiu oarecare, h_a', h_b', h_c', segmentele de înălţimi cuprinse între vârf şi ortocentru şi h_a'', h_b'', h_c'' segmentele cuprinse între ortocentru şi baze.

IUSTIN N. VALCEANU

E uşor de observat, că avem:

$$h_a = h_a' + h_a'' ,$$

de unde:

$$\frac{h_a}{h_a' + h_a''} = 1$$

Multiplicând cu $h_b'' + h_c''$, obţinem:

$$\frac{h_a (h_b'' + h_c'')}{h_a' + h_a''} = h_b' + h_c'' ,$$

deci:

$$\sum \frac{h_a (h_b'' + h_c'')}{h_a' + h_a''} = 2 (h_a'' + h_b'' + h_c'') ,$$

adică relaţia cerută.

Soluţie dată de d-l: *Ionescu P. Haralamb* (Oltenita), *Mihăileanu N.* (lic., Constanţa) şi *Popa Gh. Ioan* (lic., Oltenita).

913. — *Să se găsească numerile de patru cifre $abcd$, ştiind că cb, ad, da, bc sunt in progresie aritmetică.*

IOAN GH. POPA

Vom considera două cazuri:

1°. Cazul când progresia aritmetică:

$$\div \ cb \ , \ ad \ , \ da \ , \ bc$$

*) Enunţ rectificat.

este crescătoare. Fie r raţia, atunci avem:

$$\overline{bc} = cb + 3r$$

$$\overline{da} = ad + r$$

$$cb + bc = ad + da\ ,$$

care scrise dezvoltat ne dau:

$$10b + c - 10c - b = 3r$$

$$10d + a - 10a - d = r$$

$$10c + b + 10b + c = 10a + d + 10d + a$$

Simplificând obţinem:

$$(1)\quad \begin{cases} b - c = \dfrac{r}{3} \\ d - a = \dfrac{r}{9} \\ b + c = a + d \end{cases}$$

Din primele două relaţii deducem:

$$b - c = 3d - 3a\ ,$$

care adunată cu ultima ne dă, simplificând cu 2:

$$a + b = 2d\ .$$

Numerele a, b, c, d fiind de o singură cifră, rezultă din primele două relaţii din (1):

$$r \leqq 27 \text{ şi } r = \text{mult } 9,$$

aşa dar putem lua:

$$r = 9\ ,\quad r = 18\ ,\quad r = 27.$$

Avem deci următoarele sisteme:

$$(2)\quad \begin{cases} b \quad c = 3 \\ d - a = 1 \\ a + b = 2d \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} b - c = 6 \\ d - a = 2 \\ a + b = 2d \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} b - c = 9 \\ d - a = 3 \\ a + b = 2d\ . \end{cases}$$

Putem scri într'un tablou valorile lui a, b, c, d, care satisfac sistemul (2):

a	1	2	3	4	5	6	7
b	3	4	5	6	7	8	9
c	0	1	2	3	4	5	6
d	2	3	4	5	6	7	8

Tabloul de valori pentru a, b, c, d care satisface sistemul (3) este:

a	2	3	4	5
b	6	7	8	9
c	0	1	2	3
d	4	5	6	7

In fine sistemul (4) este satisficut numai pentru:

$$a = 3\ ,\quad b = 9\ ,\quad c = 0\ ,\quad d = 6.$$

Numerele $\overline{abcd}$ care satisfac enunţul în acest caz sunt:

1302, 2413, 3524, 4635, 5746, 6857,
7968, 2604, 3715, 4826, 5937, 3906.

2°. Cazul când progresia aritmetică:

$$\div\ \overline{cb}\ ,\ \overline{ad}\ ,\ \overline{da}\ ,\ \overline{bc}$$

este descrecătoare.

Scriind invers, avem progresia aritmetică crescătoare:

$$\div\ \overline{bc}\ ,\ \overline{da}\ ,\ \overline{ad}\ ,\ \overline{cb}$$

care diferă de progresia considerată în primul caz studiat, prin schimbarea locului cifrelor b şi c, a şi d.

Rezultă că din fiecare soluţie $\overline{abcd}$ găsită în primul caz, putem forma o nouă soluţie $\overline{dcba}$, avem astfel încă următoarele soluţii:

2031, 3142, 4253, 5364, 6475, 7586, 8697, 4062, 5173, 6284, 7395, 6093

In total problema admite 24 de soluții.

Au găsit toate cele 24 de soluții, d-nii: *Băcicov Boris* (student, Iaș), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Ghilezan A. Aurel* (Șc. Polit., Timișoara), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Parepeanu I.* (lic., Brașov), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova) *Presbiterianu Mihail* (bacalaureat) și *Velicescu Gh. Titu.*

Au dat soluții mai puține, d-nii: *Boerescu P. George* (10 soluții), *Constantinescu Mircea* (9 sol.), *Crivăț I. Vladimir* (18 sol.), *Dăscălescu Șt. Hristache* (6 sol.), *Grinberg Meer* (18 sol.), *Lupescu Gh. C-tin* (12 sol.), *Marineanu Traian* (12 sol.), *Marșieu Teodor* (12 sol), *Mereuță Emilian* (6 sol.), *Mihăileanu* N. (12 sol.), *Nicolaescu S.* (7 sol.), *Purdilă A.* (9 sol.), *Rusu D. C-tin* (9 sol.), *Smărăndoiu N.* (7 sol.), *Stoicescu I. Ernest* (9 sol.), și *Weissmann Mauriciu* (9 sol.)

PROBLEME PROPUSE

1055. — Să se găsească un număr N compus din factorii 3, 4, 5 știind că $4N^2$ are 14 divizori mai puțin ca $5N^2$, iar $3N^2$ are 15 divizori mai mult ca N^2 și 20 mai puțin $5N^2$.

CEZAR IVANESCU

1056. — Să se calculeze sumele:

$$S_2 = 1 + 102 + 10203 + \ldots + 102\ldots0n$$

$$S_2 = 1 + 201 + 30201 + \ldots + n0\ldots201$$

TEODOR MARSIEU

1057. — Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^4 + 54x^2y^2 + 81y^4 = 8521 \\ x^3y + 9xy^3 = 510 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

1058. — Știind că $m + n = 1$, se cere să se stabilească identitățile:

$$C_m^3 + C_m^2 C_n^1 + C_m^1 C_n^2 + C_n^3 = 0$$

$$C_m^4 + C_m^3 C_n^1 + C_m^2 C_n^2 + C_m^1 C_n^3 + C_n^4 = 0 ,$$

unde am notat pentru prescurtare:

$$C_p^i = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{i!}$$

V. ALACI

1059. — Din punctele A′, B′, C′ diametral opuse vârfurilor triunghiului ABC, în cercul său circumscris O, se scoboară perpendicularele $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ pe laturi. Să se arate că:

1°. Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

2°. Dreptele AO, BO, CO determină pe laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ corespunzătoare, segmente egale.

N. MIHAILEANU

1060. Se consideră un patrulater convex ABCD ale cărui diagonale se taie în E. Prin punctul E se duce o dreaptă arbitrară care întâlnește laturile AB, CD în M și N. Dreptele, NA, NB, MC, MD întâlnesc diagonalele AC, BD în punctele *a*, *b*, *c*, *d*. Să se demonstreze relațiunea:

$$\frac{Ea}{Ba} + \frac{Eb}{Ab} + \frac{Ec}{Dc} + \frac{Ed}{Cd} = 1$$

CEZAR COSNITA

1061. Să se rezolve sistemul:

$$\sin^2 x + \cos y = 3(\sin x - \cos y)$$

$$\sin x + \cos^2 y = \frac{5}{2}(\sin x - \cos y)$$

I. DUMITRIU-DADA

1962. Notațiile fiind cele obicinute într'un triunghiu, să se stabilească identitatea:

$$\sin^n A \sin^n B \sin^n C \sum \frac{h_b^n h_c^n}{r_a^{2n}(p-a)^{2n}} = \frac{a^n + b^n + c^n}{2^n R^{3n}}$$

EMILIAN MEREUTA

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa admi. nistrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngri. jire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XI. 15 IANUARIE 1932 NO. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 V. ALACI O CLASA DE IDENTITATI DEDUSE PRIN DESVOLTARI IN SERII. IMPARTIREA DIRECTA A DOUA POLINOAME. APLICATII

2. NOTE MATEMATICE: 24

3. BIBLIOGRAFIE

4. PROBLEME REZOLVATE: 996. 1014. 1015. 1016. 1019. 1020, 1021.

5. PROBLEME PROPUSE: 1063-1070.

6 INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de artegrafice „Tipografia Românească“

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** – profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei.

ANUL XI— NO. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

O CLASĂ DE IDENTITĂȚI DEDUSE PRIN DESVOLTĂRI IN SERII. IMPĂRȚIREA DIRECTĂ A DOUĂ POLINOAME. APLICAȚII.

de V. ALACI

Voiu prezenta câteva chestiuni cu caracter elementar, în legătură cu desvoltările în serii și vom deduce astfel o clasă de identități, precum și unele rezultate importante la împărțirea directă a două polinoame cu aplicațiunile corespunzătoare.

I.

1. Dacă m și n sunt numere oarecare ne întregi, astfel ca:

$$m+n=1,$$

atunci putem scri evident:

$$(1) \qquad 1+x=(1+x)^m(1+x)^n$$

Presupunând, $-1<x<1$, notând pentru prescurtare:

$$C_p^i=\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$$

și desvoltând în serie absolut convergentă binoamele $(1+x)^m$, $(1+x)^n$ din (1), putem scri:

$$1+x=(1+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots)\times$$
$$(1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots)$$

sau:

$$(2) \quad 1+x=1+x+(C_m^2+C_m^1C_n^1+C_n^2)x^2+$$
$$\cdots+(C_m^p+C_m^{p-1}C_n^1+\cdots+C_n^p)x^p+\cdots$$

Prin identificarea coeficienților acelorași puteri ale lui x, deducem următoarele identități în număr infinit:

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{p} C_m^{p-i}C_n^i=0, \quad p=2,3,\cdots,$$

identități care se pot verifica și direct.

In cazul particular $p=3$ de exemplu, avem identitatea:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}+\frac{mn(m-1)}{2!}$$
$$+\frac{mn(n-1)}{2!}+\frac{n(n-2)(n-2)}{3!}=0,$$

unde, $m+n=1$.

2. Să trecem la un caz mai general. Astfel dacă p este un întreg pozitiv, iar m și n două numere ne întregi, astfel ca:

$$m+n=p,$$

putem scri evident:

$$(1+x)^p=(1+x)^m(1+x)^n$$

Admițând, $-1<x<1$ și efectuând dezvoltările în ambii membrii, ținând seamă că membrul al 2-lea ne va da o serie ca în (2), obținem:

$$1+C_p^1x+C_p^2x^2+\cdots+C_p^px^p=1+(C_m^1+C_n^1)x$$
$$+(C_m^2+C_m^1C_n^1+C_n^2)x^2+\cdots$$
$$\cdots+(C_m^p+C_m^{p-1}C_n^1+\cdots+C_n^p)x^p+\cdots$$

Din identificarea coeficienților acelorași puteri ale lui x din ambii membrii, deducem următoarele două șiruri de identități:

$$(4) \qquad \sum_{i=0}^{q} C_m^{q-i}C_n^i=C_p^q, \quad q=1,2,\cdots p$$
$$\sum_{i=0}^{q} C_m^{q-i}C_n^i=0, \quad q=p+1,p+2,\cdots$$

care se pot verifica și direct.

3. Dacă q este un număr oarecare pozitiv, iar $-1<x<1$, atunci putem scri următoarea dezvoltare în serie absolut convergentă:

$$(5)\qquad \frac{1}{(1-x)^q}=1+\Gamma_q^1 x+\Gamma_q^2 x^2+\cdots$$

unde:

$$\Gamma_q^i=\frac{q(q+1)(q+2)\cdots(q+i-1)}{i!}$$

Relaţiunea (5) se mai poate scri astfel, când q nu este întreg:

$$1=(1-C_q^1 x+C_q^2 x^2-\cdots+(-1)^q C_q^q x^q+\cdots)\times$$
$$(1+\Gamma_q^1 x+\Gamma_q^2 x^2+\cdots)$$

sau:

$$1=1+(\Gamma_q^1-C_q^1)x+(\Gamma_q^2-C_q^1\Gamma_q^1+C_q^2)x^2+\cdots$$
$$+(\Gamma_q^p-C_q^1\Gamma_q^{p-1}+C_q^2\Gamma_q^{p-2}-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^p C_q^p)x^p+\cdots$$

Din identificare deducem următoarele identităţi în număr infinit:

$$(6)\qquad \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\Gamma_q^{p-i}C_q^i=0,\qquad p=1,2,3,\cdots$$

II.

4, *Impărţirea directă a două polinoame.*[1])

Să admitem că polinomul:

$$a_0+a_1x+\cdots+a_px^p,$$

se divide prin binomul $(1-x)^q$, q *intreg pozitiv.*

Ne propunem a găsi direct câtul.

Presupunem întâi $-1<x<1$ şi ţinând seamă de dezvoltarea (5), putem scri:

$$\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_px^p}{(1-x)^q}=$$

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_px^p)(1+\Gamma_q^1x+\Gamma_q^2x^2+\cdots)=$$
$$a_0+(a_0\Gamma_q^1+a_1)x+(a_0\Gamma_q^2+a_1\Gamma_q^1+a_2)x^2+$$
$$\cdots+(a_0\Gamma_q^m+a_1\Gamma_q^{m-1}+\cdots$$
$$+a_{m-1}\Gamma_q^1+a_m)x^m+\cdots$$

Fiindcă polinomul $a_0+a_1x+\cdots a_px^p$ am admis că se divide prin $(1-x)^q$, câtul este un polinom de gradul $p-q$, astfel că dezvoltarea de mai sus trebuie oprită la termenul în x^{p-q}, coeficienţii termenilor următori trebuind să fie nuli.

Rezultă astfel că avem:

$$(7)\qquad \frac{a_0+a_1x\cdots+a_px^p}{(1-x)^q}=a_0+(a_0\Gamma_q^1+a_1)x$$
$$+(a_0\Gamma_q^2+a_1\Gamma_q^1+a_2)x^2+\cdots$$
$$\cdots+(a_0\Gamma_q^{p-q}+a_1\Gamma_q^{p-q-1}+\cdots+a_{p-q})x^{p-q}$$

precum şi identităţile în număr infinit:

$$(8)\qquad a_0\Gamma_q^m+a_1\Gamma_q^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\Gamma_q^1+a_m=0,$$
$$(m=p-q+1,p-q+2,\cdots)$$

Restricţiunea $-1<x<1$, în care caz am stabilit identităţile (7) şi (8) o putem indepărta. In adevăr ori care ar fi x, efectuând împărţirea polinomului $a_0+a_1x+\cdots+a_px^p$ prin $(1-x)^q$ trebuie să obţinem aceiaşi coeficienţi pentru cât, ca acei din relaţia (7), căci nu putem obţine pentru cât unii coeficienţi când $-1<x<1$ şi alţii când x este în afară de intervalul $(-1,+1)$. Identităţile (8) observăm apoi că sunt independente de x.

Astfel relaţia (7) ne dă direct câtul cerut, iar identităţile (8) scriu condiţiile pentru ca polinomul $a_0+a_1x\cdots+a_px^p$ *să se dividă prin* $(1-x)^q$.

Câtul, observăm că depinde de primii $p-q+1$ coeficienţi a-i deîmpărţitului, care pot fi luaţi după voie, ceilalţi q coeficienţi trebuie să verifice relaţiile (8). Din cauza relaţiilor (8), ce-i $p-q+1$ coeficienţi care pot fi luaţi după voie, pot fi oarecare.

Evident că numai q dintre relaţiile (8) sunt distincte.

5. *Relaţiuni între coeficienţii câtului; altă formă pentru el.*

Dacă privim relaţiunea (7) şi înlocuim pe x prin $\frac{1}{x}$, apoi aducem la forma întreagă, obţinem:

$$(9)\qquad \frac{a_p+a_{p-1}x+\cdots+a_1x^{p-1}+a_0x^p}{(-1)^q(1-x)^q}$$
$$=(a_0\Gamma_q^{p-q}+a_1\Gamma_q^{p-q-1}+\cdots+a_{p-q})$$
$$+(a_0\Gamma_q^{p-q-1}+\cdots+a_{p-q-1})x+$$
$$\cdots+(a_0\Gamma_q^1+a_1)x^{p-q-1}+a_0x^{p-q}$$

[1]) A se vedea şi R. M. T. Vol. V numerile 8 şi 11.

Pe de altă parte dacă efectuăm împărțirea din primul membrul din (9) conform relației (7), obținem:

$$(10)\qquad \frac{a_p + a_{p-1}x + \cdots + a_1 x^{p-1} + a_0 x^p}{(1-x)^q}$$

$$= a_p + (a_p I_q^1 + a_{p-1})x + (a_p I_q^2 + a_{p-1} I_q^1 + a_{p-2})x^2 + \cdots + (a_p I_q^{p-q} + a_{p-1} I_q^{p-q-1} + \cdots + a_q) x^{p-q}$$

Din comparația relațiilor (9) și (10) rezultă următoarele relațiuni:

$$(11)\quad \begin{cases} a_0 I_q^{p-q} + a_1 I_q^{p-q-1} + \cdots + a_{p-q} = (-1)^q a_p \\ a_0 I_q^{p-q-1} + a_1 I_q^{p-q-2} + \cdots + a_{p-q-1} = (-1)^q (a_p I_q^1 + a_{p-1}) \\ a_0 I_q^{p-q-2} + a_1 I_q^{p-q-3} + \cdots + a_{p-q-2} = (-1)^q (a_p I_q^2 + a_{p-1} I_q^1 + a_{p-2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 I_q^1 + a_1 = (-1)^q (a_p I_q^{p-q-1} + a_{p-1} I_q^{p-q-2} + \cdots + a_{q+1}) \\ a_0 = (-1)^q (a_p I_q^{p-q} + a_{p-1} I_q^{p-q-1} + \cdots + a_q) \end{cases}$$

In virtutea acestor relații câtul diviziunei polinomului $a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ prin $(1-x)^q$ dat de relația (7) se mai poate scri și sub forma:

$$(12)\qquad \frac{a_0 + a_1 x + \cdots a_p x^p}{(1-x)^q} = a_0 + (a_0 I_q^1 + a_1)x + (a_0 I_q^2 + a_1 I_q^1 + a_2)x^2 + \cdots + (-1)^q (a_p I_q^2 + a_{p-1} I_q^1 + a_{p-2}) x^{p-q-2} + (-1)^q (a_p I_q^1 + a_{p-1}) x^{p-q-1} + (-1)^q a_p x^{p-q}$$

6. *Caz particular.* Dacă polinomul $a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ este reciproc, adică dacă coeficienții extremi sau acei ai termenilor echidistanți de extremi sunt egali, de același semn sau semne contrare, atunci câtul lui prin $(1-x)^q$ când împărțirea se face exact, este și el un polinom reciproc, care se poate scri cu ușurința:

Dacă prin urmare avem:

$$a_{p-k} = \pm a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots p,$$

atunci conform relației (12) putem scri:

$$(13)\qquad \frac{a_0 + a_1 x + \cdots \pm a_1 x^{p-1} + a_0 x^p}{(1-x)^q}$$

$$= a_0 + (a_0 I_q^1 + a_1)x + \cdots \cdots \pm (-1)^q (a_0 I_q^1 + a_1) x^{p-q-1} \pm (-1)^q a_0 x^{p-q}$$

Aplicații. Dacă p, q, n sunt întregi pozitivi și $q \leqq p$, atunci evident că polinomul, $(1-x^n)^p$ se divide prin $(1-x)^q$.

Cum:

$$(1-x^n)^p = 1 - C_p^1 x^n + C_p^2 x^{2n} - \cdots + (-1)^p C_p^p x_p^{np}$$

rezultă că coeficienții, $a_0, a_1, \cdots a_{np}$ sunt toți nuli cu excepția celor de forma:

$$a_{kn} = (-1)^k C_p^k, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots p.)$$

Polinomul $(1-x^n)^p$ fiind reciproc, conform relației (13) putem scri direct câtul împărțirei lui prin $(1-x)^q$, anume:

$$(14)\qquad \frac{(1-x^n)^p}{(1-x)^q} = 1 + I_q^1 x + I_q^2 x^2 + \cdots + I^{n-1} x^{n-1} + (I_q^n - C_p^1) x^n + (I_q^{n+1} - I_q^1 C_p^1) x^{n+1} + \cdots + (-1)^{p+q} I_q^1 x^{np-q-1} + (-1)^{p+q} x^{np-q}$$

Dezvoltarea, $(1 + x + \cdots + x^{n-1})^p$.

In cazul particular $q = p$, observăm că:

$$\frac{(1-x^n)^p}{(1-x)^q} = \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)^p = (1 + x + \cdots + x^{n-1})^p,$$

și conform dezvoltării (14) putem scri:

$$(15)\quad (1 + x + \cdots + x^{n-1})^p = 1 + I_q^1 x + I_p^2 x^2 + \cdots + I^{n-1} x^{n-1} + (I_p^n - C_p^1) x^n + (I_p^{n+1} - I_p^1 C_p^1) x^{n+1} + \cdots + I_p^1 x^{(n-1)p-1} + x^{(n-1)p},$$

Această desvoltare a fost găsită prima dată de *Moivre* [1], apoi de *Désiré André* [2], prin alte metode.

Cazul $p = 3$. Avem:

$$(1 + x + x^2)^3 = 1 + I_3^1 x + I_3^2 x^2 + (I_3^3 - C_3^1) x^3 + I_3^2 x^4 + I_3^1 x^5 + x^6$$

[1]) Miscellanea Analytica (1730) p. 196.
[2]) Annales de l'école Normale, t. 5 (1876).

Efectuând calculele obținem:

$$(16)\qquad (1+x+x^2)^3 = 1+3x+6x^2+ 7x^3+6x^4+3x^5+x^6$$

Aplicație la împărțirea a două polinoame.

1°. *Polinomul:*

$$1-2x+x^2-x^3+2x^4-x^5$$

fiind divizibil prin $(1-x)^3$, *se cere direct câtul.*

Aci avem:

$$a_0=1,\ a_1=-2,\ a_2=1,\ a_3=-1,$$
$$a_4=2,\ a_5=-1$$

și deîmpărțitul fiind un polinom reciproc, putem scri în virtutea formulei (13):

$$(17)\qquad \frac{1-2x+x^2-x^3+2x^4-x^5}{(1-x)^3}$$
$$=1+(\Gamma_3^1-2)x+x^2=1+x+x^2$$

Putem scri încă și următoarele identități, în virtutea identităților (8):

$$\Gamma_3^3-2\Gamma_3^2+\Gamma_3^1-1=0$$
$$\Gamma_3^4-2\Gamma_3^3+\Gamma_3^2-\Gamma_3^1+2=0$$
$$\Gamma_3^5-2\Gamma_3^4+\Gamma_3^3-\Gamma_3^2+2\Gamma_3^1-1=0$$

și mai general:

$$\Gamma_3^{5+\lambda}-2\Gamma_3^{4+\lambda}+\Gamma_3^{3+\lambda}-\Gamma_3^{2+\lambda}+$$
$$2\Gamma_3^{1+\lambda}-\Gamma_3^{\lambda}=0,\quad (\lambda=1,2,3,\cdots)$$

Aceste identități se pot verifica ușor și direct.

2°. *Polinomul:*

$$(1-x^3)^4$$

fiind vizibil prin $(1-x)^3$, *se cere direct câtul.*

Fiindcă:

$$(1-x^3)^4=1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12},$$

rezultă că avem:

$$a_0=a_{12}=1,\ a_1=a_2=a_4=a_5=a_7=a_8=a_{10}$$
$$=a_{11}=0,\ a_3=a_9=-4,\ a_6=6.$$

Deîmpărțitul fiind un polimon reciproc, putem scri conform relației (13):

$$\frac{(1-x^3)^4}{(1-x)^3}=1+\Gamma_3^1x+\Gamma_3^2x^2+(\Gamma_3^3-4)x^3$$
$$+(\Gamma_3^4-4\Gamma_3^1)x^4-(\Gamma_3^4-4\Gamma_3^1)x^5$$
$$-(\Gamma_3^3-4)x^6-\Gamma_3^2x^7-\Gamma_3^1x^8-x^9$$

Efectuând coeficienții avem:

$$(18)\qquad \frac{(1-x^3)^4}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+6x^3$$
$$+3x^4-3x^5-6x^6-6x^7-3x^8-x^9$$

De asemenea putem scri încă și următoarele identități, în virtutea identităților (8):

$$\Gamma_3^{10}-4\Gamma_3^7+6\Gamma_3^4-4\Gamma_3^1=0$$
$$\Gamma_3^{11}-4\Gamma_3^8+6\Gamma_3^5-4\Gamma_3^2=0$$
$$\Gamma_3^{12}-4\Gamma_3^9+6\Gamma_3^6-4\Gamma_3^3+1=0,$$

și mai general:

$$(19)\ \Gamma_3^{12+\lambda}-4\Gamma_3^{9+\lambda}+6\Gamma_3^{6+\lambda}-4\Gamma_3^{3+\lambda}+\Gamma_3^{\lambda}=0,$$
$$(\lambda=1,2,3\cdots)$$

Aceste identități se pot verifica și direct.

Să verificăm de exemplu direct, identitatea (19). Observând că:

$$\Gamma_3^{\alpha}=\frac{3.4\cdots(3+\alpha-1)}{\alpha!}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2},$$

primul membru al relației (19) se poate scri, lăsând numitorul 2, la 0 parte:

$$(\lambda+13)(\lambda+14)-4(\lambda+10)(\lambda+11)+$$
$$6(\lambda+7)(\lambda+8)-4(\lambda+4)(\lambda+5)+(\lambda+1)(\lambda+2)$$

Coeficientul lui λ^2 este:

$$1-4+6-4+1=0$$

Coeficientul lui λ este:

$$27-84+90-36+3=0$$

Termenul liber de λ este:

$$182-440+336-80+2=0$$

Astfel identitatea (19) este verificată.

7. *O clasă de identități trigonometrice.*

Relațiunile algebrice (13), (14) și (15) în condițiunile în care ele sunt valabile se pot transforma ușor într'o clasă interesantă de identități trigonometrice, prin următoarea metodă. Se înlocuește x prin x^2 în relațiile (13), (14) sau (15), apoi se îm-

part aceste relaţii respectiv prin x^{p-q}, x^{np-q}, $x^{(n-1)p}$ şi se obţine respectiv:

$$\frac{a_0(x^{-p}\pm x^p)+a_1(x^{-(p-2)}\pm x^{p+2})+a_2(x^{-(p-4)}\pm x^{p+4})+\cdots}{(x^{-1}-x)^q}$$

$$= a_0[x^{-(p-q)} \pm (-1)^q x^{p+q}] + \qquad (20)$$

$$(a_0\Gamma_q^1 + a_1)[x^{-(p-q-2)} \pm (-1)^q x^{p-q-2}] + \cdots$$

$$(21)\quad \frac{(x^{-n}-x^n)^p}{(x^{-1}-x)^q} = x^{-(np-q}+(-1)^{p+q}x^{np-q}$$

$$+\Gamma_q^1[x^{-(np-q-2)}+(-1)^{p-q}x^{np-q-2}]+\cdots$$

$$22)\quad [(x^{-(n-1)}+x^{n-1})+(x^{-(n-3)}+x^{n-3})+\cdots]^p$$

$$= x^{-(n-1)p}+x^{(n-1)p}+\Gamma_p^1(x^{-(n-1)p+2}+x^{(n-1)p-2})+\cdots$$

Dacă în aceste identităţi efectăum transformarea:

$$(23)\qquad x = e^{it},\quad (i=\sqrt{-1})$$

şi ţinem seamă că conform relaţiunilor lui *Euler:*

$$(24)\quad x^\alpha + x^{-\alpha} = 2\cos\alpha t,\quad x^\alpha - x^{-\alpha} = 2i\sin\alpha t,$$

atunci relaţiunile (20), (21) şi (22) se transformă în clasa de identităţi trigonometrice ce ne propusesem a construi.

Vom invedera prin câteva exemple precise, metoda expusă.

1°. Dacă în relaţiunea (17) pe care am stabilit-o înlocuim pe x prin x^2 şi împărţim apoi ambii membrii prin x^2, obţinem:

$$\frac{(x^{-5}-x^5)-2(x^{-3}-x^3)+(x^{-1}-x)}{(x^{-1}-x)^3}$$

$$= 1+(x^{-2}+x^2)$$

Dacă aci efectuăm acum transformarea (23) şi ţinem seamă de realităţiile (24) deducem uşor următoarea identitate trigonometrică, după ce simplificăm prin $-2i$:

$$\frac{\sin 5t - 2\sin 3t + \sin t}{-4\sin^3 t} = 1+2\cos 2t$$

sau:

$$\frac{\sin 5t - 2\sin 3t + \sin t}{4\sin^3 t} = 1-4\cos^2 t$$

2°. Dacă luăm relaţiunea (18) pe care am stabilit'o, înlocuim x prin x^2, apoi pe x prin $-x^2$ şi împărţim ambii membri prin x^9, obţinem:

$$\frac{(x^{-3}-x^3)^4}{(x^{-1}-x)^3} = (x^{-9}-x^9)+3(x^{-7}+x^7)+$$

$$6(x^{-5}+x^5)+6(x^{-3}-x^3)+3(x^{-1}+x)$$

$$\frac{(x^{-3}+x^3)^4}{(x^{-1}+x)^3} = (x^{-9}+x^9)-3(x^{-7}+x^7)+$$

$$6(x^{-5}-x^5)-6(x^{-3}+x^3)+3(x^{-1}+x)$$

Dacă în aceste două relaţiuni efectuăm transformarea (23) şi ţinem seamă de relaţiile (24), deducem uşor următoarele două identităţi trigonometrice:

$$\frac{\sin^4 3t}{\sin^3 t} = \sin 9t + 3\sin 7t + 6\sin 5t +$$

$$6\sin 3t + 3\sin t$$

$$\frac{\cos^4 3t}{\cos^3 t} = \cos 9t - 3\cos 7t + 6\cos 5t -$$

$$6\cos 3t + 3\cos t$$

3°. Dacă în relaţiunea (16) pe care am stabilit'o, împărţim ambii membrii prin x^3, obţinem:

$$[1+(x^{-1}+x)]^3 = (x^{-3}+x^3)+3(x^{-2}+x^2)+$$

$$6(x^{-1}+x)+7$$

Dacă aci efectuăm transformarea (23) şi ţinem seamă de relaţiile (24), deducem uşor următoarea identitate trigonometrică:

$$(1+2\cos t)^3 = 7+12\cos t+6\cos 2t+2\cos 3t$$

Cred suficiente aceste aplicaţii pentru a invedera cum se poate construi printr'o metodă foarte simplă, o interesantă clasă de identităţi trigonometrice.

NOTE MATEMATICE

24. — *Corespondenţe remarcabile rezultând dintr'o nouă construcţie a 2 puncte inverse.*

Fie M un punct oarecare în planul triunghiului A B C. Cercul B M C tae laturile A B şi A C în C' şi B' respectiv. *Fie* N *omologul punctului* M *considerat în triunghiul* A B' C' *în raport cu triunghiul* A B C *care-i asemenea cu el.*

Prin puncte omoloage în 2 triunghiuri asemenea înţelegând puncte ce joacă acelaş rol în cele 2 triunghiuri, adică puncte ce sunt obţinute prin construcţii analoage.

a) Când M descrie dreapta OK a triunghiului ABC (dreapta ce uneşte centrul cercului circumscris cu punctul lui *Lemoine*) punctul N descrie hyperbola lui *Kiépert* a triunghiului ABC.

b) Când M descrie dreapta OI a triunghiului ABC (dreapta ce uneşte centrul cercului circumscris cu centrul cercului înscris) punctul N descrie hyperbola lui *Boutin* sau *Feurbach* a triunghiului ABC.

c) Când M descrie dreapta lui *Euler* OH a triunghiului ABC, punctul N descrie hyperbola lui *Jerabek* a triunghiului ABC.

d) Când M descrie polara trilineară a punctului I (centrul cercului înscris în triunghiul ABC) în raport cu triunghiul ABC punctul N descrie o elipsă circumscrisă, tangentă la cele 3 bisectoare exterioare.

Toate rezultă imediat observând că *omologul* N *a unui punct* M *considerat în triunghiul* AB′C′ (B′, C′ fiind punctele unde cercul BMC tae laturile AC şi AB) *este înversul lui* M *în raport cu triunghiul* ABC (M şi N joacă acelaş rol *respectiv* în cele 2 triunghiuri asemenea AB′C′ şi ABC).

Fie O′ şi O″ respectiv centrele cercurilor BNC şi C′BMCB′. Punctele O′ şi O″ sunt punctele omoloage în cele 2 triunghiuri asemenea ABC şi AB′C′ şi cum şi M, N (2 puncte inverse în triunghiul ABC) sunt după cum am văzut puncte omoloage în cele 2 triunghiuri, rezultă imediat următoarea teoremă a D-lui *Barbilian* (Gazeta Matematică XXI—298):

M′ şi M″ *fiind 2 puncte isogonale ale triunghiului* ABC, *iar* O′ şi O″ *centrele cercurilor* (BM′C) şi (BM″C) *triunghiurile* AOM′ şi AO″M″ *sunt invers asemenea.*

Chestiunea rezultă imediat din consideraţiile noastre de mai sus, cele 2 triunghiuri fiind triunghiuri omoloage (obţinute prin construcţii analoage) în cele 2 triunghiuri asemenea ABC şi AB′C′.

Ca încheere ne mai punem o problemă de construcţii care am publicat-o în *Revista Matematica Bârlădeană* 1926—46:

M fiind un punct *determinat* a triunghiului ABC (adică ni se spune ce rol joacă în acest triunghiu), cercul BMC tae laturile AB şi AC în C_1 şi B_1. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând punctele A, B_1, C_1. Cazuri particulare:

1. Când M *e* ortocentrul triunghiului ABC.
2. Când M *e* centrul cercului ABC.
3. Când M *e* centrul cercului înscris în triunghiul ABC.
4. Când M *e* centrul de greutate a triunghiului dat.
5. Când M *e* punctul lui *Lemoine* a triunghiului dat.

Soluţia e simplă ţinând seamă că omologul N a punctului M considerat în triunghiul AB_1C_1 în raport cu triunghiul ABC e inversul lui M în triunghiul ABC, deci punctul M jucând un rol oarecare în triunghiul ABC joacă rolul inversului său în triunghiul AB_1C_1.

MICU GRÜNBAUM.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVII, Nr. 4, Decemvrie 1931. Sur les points isotomiques dans le triangle, par *V. Thébault*. Divizibilitatea determinanţilor numerici, de *I. Ionescu*. Ecuaţiuni cu rădăcini subunitare, de *Petre Sergescu*.

2. *Revista Brasileira de Matematica* ano 3, Nº. 1, Septembro 1931. *Galeria Matematică. Joachim Gomes* de *Souza*. Joachim Gomes de Souza, de *Luis Freiere*: Gândirea matematică, carteziană, de *Pedro Tavares*. Introducere la studiul diviziunii algebrice, de *S. Sodré da Gama*. Despre electroni şi mecanica lor, de *O. Vieira de Campos*. Despre ecuaţiuni diferenţiale integrate prin diferenţiale, de *Ignacis M. A. do Amaral*. O egalitate de la care se pleacă pentru a calcula rădăcina unei ecuaţii prin metoda aproximaţiilor succesive, de *Otacilio Novais*. Rezolvirea ecuaţiilor de orice grad, de *B. şi J. Grabois*. Nou mijloc pentru a rezolvi ecuaţiile simultane, de *S. Serebrenic*. O dobândă medie, de *Abilio Alencar*. Note matematice. Curiozităţi matematice. Probleme propuse.

3. *Micu Grünbaum. Contribuţii la geometria triunghiului.* Este o broşură de 55 pagini, în care autorul tratează elegant şi simplu următoarele chestiuni:

1º. Traducerea geometrică a soluţiilor trigonometrice şi obţinerea identităţilor trigonometrice pe cale geometrică.

2º. Note din transformarea cosogonală, transformare datorită autorului.

3º. Teorema lui *Steiner* generalizată.

Recomandăm această broşură corespondenţiilor noştrii.

PROBLEME REZOLVATE

996. — *Să se determine triunghiurile dreptunghice în care o catetă este egală cu proecțiunea celeilalte catete pe ipotenuză.*

A. HOLLINGER

Fie un triunghiu dreptunghiu A B C având catetele b și c și A D înălțimea.

Relația care trebuie să existe, este:

(1) $$b = DC = c \cos C$$

De altă parte, avem în triunghiul dreptunghic A B C:

(2) $$b = c \operatorname{tg} C$$

Din (1) și (2) deducem:

$$\operatorname{tg} C = \cos C$$

*** $$\sin C = \cos^2 C = 1 - \sin^2 C,$$

sau:

$$\sin^2 C + \sin C - 1 = 0$$

Rezolvind această ecuație, avem singura soluție:

(3) $$\sin C = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+2,23606}{2} = 0,61803$$

fiindcă $-1 \leq \sin C \leq 1$.

Luând logaritmii în relația (3), avem:

$$\lg \sin C = \overline{1},\ 79101,$$

de unde deducem trecând la arce:

$$C = 38^0\ 10'\ 22''$$

Triunghiurile dreptunghice care satisfac enunțul sunt acelea în care unul din unghiurile ascuțite este de 38°, 10′, 22″ cu aproximație în minus de o secundă.

Soluții date de d-nii: *Boeriu Valer* (Șc. Polit., Timișoara), *Cojocaru V. I.*, *Dumitrascu N. Romeo* (lic., Roman), *Ioaniu C. Gh.* (lic., Craiova), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat, Roman), *Margulius Marius* (București), *Mereuță Emilian* (student, București), *Mihăileanu N. N.* (lic., Constanța), *Parepeanu I.*, *Purdilă A.*, *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanța), *Stefănescu—Goangă Aurel*, *Stoicescu I. Ernest* (bacalaureat, București), și *Tica P. Marin* (Șc. Milit., de Artilerie).

Observări. 1°. Dnii *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Mereuță Emilian* și *Negrea A. Leonte Mircea*, au stabilit că triunghiurile dreptunghice care satisfac problema sunt acelea în care există relația:

$$b^2 = a\,c$$

2°. Dl. *Pascaru I.* (lic. Național; Iași) a stabilit, că:

$$\sin C = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

fără a duce calculele mai departe.

1014. — *Un negustor cumpără din târg 100 metri stofă. Spre casă perde o bucată din acea stofă pe cave i-o găsește un consătean căruia negustorul îi dă pentru adus jumătatea costului bucății perdute. Negustorul vinde stofa cu 700 lei metrul și are un câștig de 0,3 din cât la costat pe el stofa întreaga în târg.*

Dacă negustorul ar fi perdut o bucată de stofă de patru ori mai mare ca bucata pe care a perdut'o, și dacă consăteanului i-ar fi dat jumătate din costul bucății aduse, vânzând astfel toată stofa tot cu 700 lei metru, nu ar fi avut nici un câștig. Se cere cât l'a costat metru și câți metri a perdut.

MIRCEA CONSTANTINESCU

Fie x costul unui metru și y numărul metrilor perduți.

Atunci evident că relația:

(1) $$100 \times 700 = 100\,x + 0,3 \times 100\,x + \frac{x\,y}{2},$$

scrie că suma încasată din vânzare 70000 lei, cuprinde costul stofei 100 x, mărit cu câștigul $0.3 \times 100\,x$ și încă mărit cu suma dată consăteanului $\frac{x\,y}{2}$ pentru y metri perduți.

De asemenea relația:

(2) $$100 \times 700 = 100\,x + 4\,\frac{x\,y}{2},$$

scrie că suma incasată din vânzare 70000 lei cuprinde costul stofei 100 x, mărit cu suma pe care ar fi dat'o consăteanului, dacă ar fi perdut $4y$ metri.

Ecuațiile (1) și (2) simplificate ne dau următorul sistem:

(3) $$\begin{cases} 260\,x + x\,y = 140000 \\ 100\,x + 2\,x\,y = 70000 \end{cases}$$

Prin inpărţire deducem:

$$\frac{260+y}{100+2y}=2,$$

de unde:

$$y=20$$

Inlocuind valoarea lui y în execuţia 2-a din (3), obţinem:

$$140\,x=70000$$

$$x=500$$

Prin urmare negustorul a cumparat din târg stofa cu 500 lei metru şi a perdut 20 metri.

Soluţii date de d-nii: *Chirică I. Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Chirilă Andreiu* (Şc. Polit., Timişoara), *Cristalopol C. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin* (lic. Naţional, Iaşi), *Dumitrascu N. Romeo* (bacalaureat, Roman), *Fofiu Cornel* (liceul, Beiuş), *Grinberg N. Meer* (student, Iaşi), *Iliescu Emilian* (liceul Militar, Craiova), *Iliescu I. Teodor* (liceul, Caracal), *Ivănescu Cezar* (liceul, Bârlad), *Landmann I.* (Tighina), *Manasiu N. D-tru* (liceul Militar, Tg.-Mureş), *Mecu Mihail* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Motoc I. Mircea* (lic., Oltenita), *Nagler M.* (lic. Naţional, Iaşi), *Parepeanu I. C.* (bacalaureat, Braşov), *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Petrică I. Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Pop I. Leontin* (Şc. Polit, Timişoara), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Purcel At.* (Şc. Polit. Timişoara), *Rusu D. C-tin* (Constanţa), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Stănescu-Brezuica D.* (Caracal) şi *Weissmann Mauriciu* (bacalaureat, Constanţa).

1015. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} a\,x+a^2\,y^2=b\,x \\ b^2\,x^2+b\,y=a\,y \end{cases}$$

I. DUMITRIU-DADA

Din prima ecuaţie deducem:

$$(1)\qquad x=\frac{a^2\,y^2}{b-a},$$

şi inlocuind în ecuaţia 2^a, avem:

$$\frac{a^4\,b^2\,y^4}{(b-a)^2}+b\,y=a\,y$$

De aci deducem:

$$y=0 \quad \text{şi} \quad y^3=\frac{(a-b)^3}{a^4\,b^2}$$

deci:

$$y=\frac{a-b}{a\sqrt[3]{a\,b^2}}\left(\cos\frac{2\,k\,\pi}{3}+i\sin\frac{2\,k\,\pi}{3}\right)$$

$$k=0,1,2.$$

Avem deci pentru y, următoarele valori:

$$y=0,\ y=\frac{a-b}{a\sqrt[3]{a\,b^2}},\quad y=\frac{(b-a)(1-i\sqrt{3})}{2\,a\sqrt[3]{a\,b^2}},$$

$$y=\frac{(b-a)(1+i\sqrt{3})}{2\,a\sqrt[3]{a\,b^2}}$$

Inlocuind aceste valori în (1), obţinem pe x corespunzător:

Sistemul dat admite astfel următoarele patru sisteme de soluţii:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{a-b}{b\sqrt[3]{a^2\,b}} \\ y=\dfrac{a-b}{a\sqrt[3]{a\,b^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{(a-b)(1+i\sqrt{3})}{2\,b\sqrt[3]{a^2\,b}} \\ y=\dfrac{(a-b)(1-i\sqrt{3})}{2\,a\sqrt[3]{a\,b^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{(a-b)(1-i\sqrt{3})}{2\,b\sqrt[3]{a^2\,b}} \\ y=\dfrac{(b-a)(1+i\sqrt{3})}{2\,a\sqrt[3]{a\,b^2}} \end{cases}$$

Au găsit toate sistemele de soluţii d-nii: *Boeriu Valer* (Şc. Polit., Timişoara), *Cristescu Ion* (Sub-Lt. de Artilerie), *Fofiu Cornel* (lic., Beiuş), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (lic., Constanţa), *Păsculescu Vasile* (Şc. Milit. de Geniu), *Pop Leontin* (Şc. Polit., Timişoara), *Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanţa) şi *Stan I. Ioan* (lic., Roman).

Au dat numai sistemele de soluţii reale, d-nii: *Chirilă Andreiu* (lic., Timişoara), *Cristalopol C. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Dan I Traian* (lic., Beiuş), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dumitrascu N. Romeo* (bacalaureat, Roman), *Grinberg N. Meer* (student, Iaşi), *Ioanin C. Gh.* (lic., Craiova), *Iliescu M. Emilian* (lic., Milit., Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat, Roman), *Manasiu N. D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mehedinţi D.* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Parepeanu I. Popescu I. Alexandru* (Şc. Polit., Timişoara), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ştefănescu Anibal* (Bucureşti) şi *Tica P. Marin* (bacalaureat, Craiova).

Observare. Dl *Mihăileanu N. N.*, a rezolvat şi următorul sistem mai general:

$$\begin{cases} (b-a)\,x^n=a^m\,y^{mn} \\ (a-b)\,y^n=b^m\,x^{mn} \end{cases}$$

1016. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} xy+xy^2+xy^2z+xyz=144 \\ zx+zx^2+x^2yz+xyz=120 \\ yz+yz^2+xyz^2+xyz=270 \end{cases}$$

CEZAR COSNITA

Sistemul dat se poate scri încă:

$$\begin{cases} xy(1+y)+xyz(1+y)=144 \\ zx(1+x)+xyz(1+x)=120 \\ yz(1+z)+xyz(1+z)=270, \end{cases}$$

sau:

$$(1) \qquad \begin{cases} xy(1+y)(1+z)=144 \\ zx(1+x)(1+y)=120 \\ yz(1+x)(1+z)=270 \end{cases}$$

Inmulţind aceste ecuaţii, obţinem:

$$x^2y^2z^2(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2 = 144 \times 120 \times 270 = 144 \times 32400$$

De aci deducem;

$$xyz(1+x)(1+y)(1+z)=\pm 2160$$

Impărţind această ecuaţie pe rând cu ecuaţiile din (1), obţinem sistemele, echivalente cu cel dat:

$$(2) \quad \begin{cases} z(1+x)=15 \\ y(1+z)=17 \\ x(1+y)=8 \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} z(1+x)=-15 \\ y(1+z)=-18 \\ x(1+y)=-8 \end{cases}$$

Să rezolvăm sistemul (2). Din prima şi ultima ecuaţie din (2) deducem:

$$(4) \qquad z=\frac{15}{1+x}, \quad y=\frac{8}{x}-1=\frac{8-x}{x}$$

Aceste valori înlocuite în a 2^a ecuaţie din (2) ne dă:

$$\frac{8-x}{x}\cdot\frac{16+x}{1+x}=18$$

$$^{**}_{**} \qquad 19x^2+26x-128=0,$$

Rezolvind această ecuaţie, avem:

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{169+2432}}{19}=\frac{-13\pm 51}{19}$$

şi deci:

$$x=2, \qquad x=-\frac{64}{19}$$

Inlocuind aceste valori în (4) avem valorile corespunzătoare pentru y şi z.

Rezultă că sistemul (2) admite următoarele două sisteme de soluţii:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x=-\frac{64}{19} \\ y=-\frac{27}{8} \\ z=-\frac{19}{3} \end{cases}$$

Trecem acum la rezolvarea sistemului (3).

Din prima şi ultima ecuaţie din (3) deducem:

$$(5) \quad z=-\frac{15}{1+x}, \quad y=-\frac{8}{x}-1=-\frac{8+x}{x}$$

Inlocuind aceste valori în a 2^a ecuaţie din (3), obţinem:

$$\frac{8+x}{x}\cdot\frac{14-x}{1+x}=-18$$

$$^{**}_{**} \qquad 17x^2+24x+112=0$$

Rezolvind această ecuaţie avem:

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{144-1904}}{17}=\frac{-12\pm 4i\sqrt{110}}{17}$$

Inlocuind aceste valori în (5), găsim pe y şi z corespunzători.

Avem deci următoarele două sisteme de soluţii pentru sistemul (3)

$$\begin{cases} x=\frac{-12\pm 4i\sqrt{110}}{17} \\ y=\frac{-1\pm 2i\sqrt{110}}{7} \\ z=\frac{5\pm 2i\sqrt{110}}{7} \end{cases}$$

Sistemul de ecuaţii dat, admite astfel patru sisteme de soluţii.

Soluții date de d-nii: *Boeriu Valer* (Șc. Polit., Timișoara), *Chirilă Andreiu* (lic., Timișoara), *Cristalopol C. Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Cristescu I.* (Sub-Lt. de Artilerie), *Dumitrascu Romeo* (bacalaureat, Roman), *Iliescu M. Emilian* (lic., Milit., Craiova), *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat, Roman), *Mihăileanu N. N.* (lic., Constanța), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Parepeanu C. I., Păsculescu M. Vasile* (Șc. Milit. de Geniu), *Pop Leontin* (Șc. Polit., Timișoara). *Predoescu Marin* (lic. Buzești. Craiova), *Rusu D C-tin* (Constanța) *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Stan I.* (lic., Roman) și *Tica P. Marin* (bacalaureat).

1019. — *Să se stabilească identitatea:*

$$1+\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4}=2i\frac{(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}}{(1+i)^n-(1-i)^n},\ (i=\sqrt{-1})$$

TEODOR MARSIEU

Observând că avem evident:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 1+i&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ 1-i&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

deducem:

$$(1+i)^{n-1}=(\sqrt{2})^{n-1}\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{4}+i\sin(n-1)\frac{\pi}{4}\right]$$

$$(1-i)^{n-1}=(\sqrt{2})^{n-1}\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{4}-i\sin(n-1)\frac{\pi}{4}\right]$$

Adunând aceste relații, avem:

$$(2)\qquad (1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}=(\sqrt{2})^{n+1}\cos(n-1)\frac{\pi}{4}$$

Din (1) deducem încă:

$$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(1-i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

pe care scăzându-le obținem:

$$(3)\qquad (1+i)^n-(1-i)^n=i(\sqrt{2})^{n+2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

Inpărțind relațiile (2) prin (3), putem scri succesiv:

$$\frac{(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}}{(1+i)^n-(1-i)^n}=\frac{\cos(n-1)\frac{\pi}{4}}{i\sqrt{2}\sin\frac{n\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)}{i\sqrt{2}\sin\frac{n\pi}{4}}$$

De aci deducem:

$$2i\frac{(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-2}}{(1+i)^n-(1-i)^n}=1+\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4},$$

care este tocmai identitatea dată.

Soluții date de d-nii: *Boeriu Valeriu* (Șc. Polit, Timișoara), *Cristescu I.* (Sub-Lt), *Cristalopol C. Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Dăscălescu Hristache* (student, București), *Grinberg N. M.* (student, Iași), *Ioanin C. Gh.* (lic., Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Margulius Marius* (lic. Spiru Haret, București), *Mereuță Emilian* (student, București), *Motoc I. Mircea, Negrea Leonte A. Mircea* (student, București), *Parepeanu I* și *Purcel Atanasiu* (Șc. Polit., Timișoara).

Altă soluție. Considerând ecuația:

$$(1)\qquad \left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)x^n-C_n^1\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right]x^{n-1}+$$

$$\cdots+(-1)^n\sin\frac{n\pi}{2}=0,$$

cu rădăcinele:

$$(2)\qquad x=\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)},\ k=0,1,2,\ldots n-1,$$

și scriind suma rădăcinelor (2) în funcție de coeficienții ecuații (1), avem:

$$(3)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{4}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}=n\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{n\pi}{4}}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{2}}\left(1+\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4}\right)$$

Ținem apoi seamă că în „R. M. T.“ anul IX. pag. 83 este demonstrată relația:

$$(4)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{4}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}=ni\sqrt{2}\frac{(2+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}}{(1+i)^n-(1-i)^n}$$

Din (3) și (4) deducem:

$$1+\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{4}=2i\frac{(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}}{(1+i)^n-(1-i)^n}$$

adică identitatea cerută.

Soluție dată de autor și de d-l *Mihăileanu N.* (lic., Constanța).

Observare. D-nii *Dăscălescu Hristache*, *Grinberg N. Meer* și *Mereuță Emilian*, au observat că problema este în intregime rezolvată de autor în Nota 14 „R. M. T." an XI., așa cum este în a 2ª soluție de mai sus.

1020. — *Știind că:*

$$a+b+c=\pi,$$

să se stabilească identitatea:

$$\Sigma\sin(a+b+2c)-\Sigma\sin(a+b-2c)=$$

$$16\left[\Pi\cos a\cos\frac{a}{2}-\Pi\sin a\sin\frac{a}{2}\right]-4\sin a\sin b\sin c$$

IUSTIN N VALCEANU

Notând cu E primul membru, putem scri succesiv:

$$(1)\quad E=2\Sigma\cos(a+b)\sin 2c=4\Sigma(\cos a\cos b-\sin a\sin b)\sin c\cos c=4\cos a\cos b\cos c(\sin a+\sin b+\sin c)-4\sin a\sin b\sin c(\cos a+\cos b+\cos c)$$

In virtutea relațiilor cunoscute:

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\cos a+\cos b+\cos c=1+4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2},$$

căci $a+b+c=\pi$, (C. de P. Cap. XVII,) relația (1) se mai poate scri:

$$E=16\cos a\cos b\cos c\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$-16\sin a\sin b\sin c\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$-4\sin a\sin b\sin c=16\left[\Pi\cos a\cos\frac{a}{2}\right.$$

$$\left.-\Pi\sin a\sin\frac{a}{2}\right]-4\sin a\sin b\sin c$$

Avem astfel stabilită identitatea dată.

Soluții date de d-nii: *Grinberg N M.* (student, Iași) *Mihăileanu N. N.* (Constanța), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București) și *Rusu D. C-tin* (bacalaureat Constanța).

1021. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, se cere să se stabilească identitatea:*

$$\frac{r_c(r_a-r_b)}{r_b(r_c+r)}+\frac{r_a(r_b-r_c)}{r_c(r_a+r)}+\frac{r_b(r_c-r_a)}{r_a(r_b+r)}$$

$$=\frac{1}{r}\sum r_a\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}$$

MIRCEA I. GROSSU.

In virtutea relațiilor cunoscute într'un triunghiu, anume:

$$r=\frac{s}{p},\quad r_a=\frac{s}{p-a},\quad r_b=\frac{s}{p-b},\quad r_c=\frac{s}{p-c},$$

putem scri:

$$(1)\quad \frac{r_a(r_b-r_c)}{r_c(r_a+r)}=\frac{\frac{s}{p-a}\left(\frac{s}{p-b}-\frac{s}{p-c}\right)}{\frac{s}{p-c}\left(\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p}\right)}=$$

$$\frac{p(b-c)}{(p-b)(2p-a)}=\frac{p}{p-b}\cdot\frac{b-c}{b+c}$$

Se mai cunoaște într'un triunghiu, relația:

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2},\text{ sau }\frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tp}\frac{B+C}{2}},$$

și încă:

$$\frac{p}{p-b}=\frac{r_b}{r},$$

astfel că relația (1) se poate scri:

$$\frac{r_a(r_b-r_c)}{r_c(r_a+r)}=\frac{r_b}{r}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}$$

De aci rezultă imediat:

$$\sum \frac{r_a(r_b - r_c)}{r_c(r_a + r_b)} = \frac{1}{r} \sum r_b \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}},$$

care scrisă dezvoltat este tocmai identitatea cerută:

Soluții date de d-nii: *Boeriu Valer* (Șc. Polit., Timișoara), *Dan T. Traian* (lic., Beiuș), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Dumitrescu Romeo* (bacalaureat, Roman), *Fofiu Cornel* (lic., Beiuș), *Grinberg N. Meer* (student, Iași), *Mircea I. Grossu* (lic. Carol, Craiova), *Ioaniu C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic., Bârlad), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat, Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mereuță Emilian* (student, București), *Mihăileanu N. N.* (Constanța), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Parepeanu C. I.*, *Păsculescu M. Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Pop I. Leontin* (Șc. Polit., Timișoara), *Purcel At.* (Șc. Polit. Timișoara) și *Rusu D. C-tin* (absolvent, Constanța).

PROBLEME PROPUSE

1063. — Produsul primelor două cifre a unui număr de trei cifre este egal cu cubul produsului cifrelor extreme. Să se găsească acel număr știind că scăzut din răsturnatul său ne dă 99.

TEODOR MARSIEU

1064. — Să se găsească patratul perfect de forma $abbacb$, unde cb este patrat perfect, iar ab număr prim.

N. MIHAILEANU

1065. — O persoană voește să parcurgă cu trenul, două distanțe diferite și posedă în acest scop două bilete cu reducere, unul cu 50% la clasa II^a și altul cu 75% la clasa I^a.

Presupunând că prețurile sunt direct proporționale cu distanțele și că costul unui bilet de clasa I^a este $\frac{7}{5}$ din cel de clasa II^a, se întreabă:

1°. Ce bilet să întrebuințeze acea persoană pe distanța cea mai mare?

2°. In ce caz modul de întrebuințare al biletelor ar fi indiferent.

CORNELIU GEORGESCU.

1066. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (x-y)(xy-1) = axy \\ (x^2-y^2)(x^2y^2-1) = 11\,ax^2y^2 \end{cases}$$

Să se considere cazul particular $a = 3$.

IOAN CURCHI

1067. — Fie un triunghiu oarecare ABC și A_1, B_1, C_1 punctele unde înălțimele tae cercul circumscris, iar A_2, B_2, C_2, punctele diametral opuse vârfurilor, în același cerc.

Dreptele A_1A_2, A_1B_2, C_1C_2 formează triunghiul $A'B'C'$.

Să se demonstreze că:

1°. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunst asemenea și să se calculeze raportul lor de asămănare.

2°. Dreptele $A'A_2, B'B_2, C'C_2$ sunt concurente.

3°. Perpendicularele scoborâte din A', B', C' respectiv pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sunt concurente.

CEZAR IVANESCU

1068. — Aria triunghiului ortic e medie proporțională între aria triunghiului format din punctele de contact ale triunghiului ortic cu cercul său înscris și aria triunghiului de referință (presupus cu unghiuri ascuțite).

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

1069. — Să se stabilească identitățile:

$$(1 + 2\cos t + 2\cos 2t)^2 = 5 + 2(\cos 4t + 2\cos 3t + 3\cos 2t + 4\cos t)$$

$$(1 + 2\cos t + 2\cos 2t + 2\cos 3t)^2 = 7 + 2(\cos 6t + 2\cos 5t + 3\cos 4t + 4\cos 3t + 5\cos 2t + 6\cos t)$$

Să se generalizeze.

V. ALACI

1070. — Să se arate că dacă avem:

$$\sin x + \cos x = a$$

$$\sin^5 x + \cos^5 x = b,$$

atunci rezultă:

$$\frac{4(a^5 - b)}{5a(1 - a^2)(a^2 - 2a - 1)} = 1$$

ION MARGINEANU

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa admi. nistrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngri. jire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Rugăm pe corespondenții noștri, a ne trimete din timp abonamentul pe anul XII, care începe la 15 Martie 1932. Prețul abonamentului este de 100 (una sută) lei.

ANUL XI. 15 FEBRUARIE 1932 NO. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. HARALAMB P. IONESCU EXPRIMAREA ELEMENTELOR UNUI TRIUNGHIU IN FUNCTIE DE RAZELE CERCURILOR EXINSCRISE.
2. NOTE MATEMATICE: 25, 26.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 1003, 1022, 1024, 1025.
5. PROBLEME PROPUSE: 1071–1078.
6. INFORMATIUNI
7. TABLA DE MATERII.

TIMISOARA

Institut de artegrafice „Tipografia Românească“

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.
Anul X, broşat 120 lei

ANUL XI—No. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1932

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

EXPRIMAREA ELEMENTELOR UNUI TRIUNGHIU IN FUNCȚIE DE RAZELE CERCURILOR EXINSCRISE

de HARALAMB P. IONESCU

Bazându-mă pe unele relațiuni stabilite de D-l *Cezar Coșniță* în „R. M. T." an IX, No. 2 precum și pe alte formule cunoscute voiu da unele formule pentru elementele unui triunghiu în funcție de razele cercurilor exinscrise.

Afară de alte formule cunoscute, vom ține seamă pentru stabilirea celor indicate mai sus de formulele:

$$(1)\qquad h_a=\frac{2\,r_b\,r_c}{r_b+r_c},\quad h_b=\frac{2\,r_a\,r_c}{r_a+r_c},\quad h_c=\frac{2\,r_a\,r_b}{r_a+r_b}.$$

In articolul sus citat formulele laturilor sunt:

$$a=\frac{2\,h_a\,h_b^2\,h_c^2}{\sqrt{\Pi(h_a\,h_b+h_b\,h_c-h_c\,h_a)\cdot\Sigma\,h_a\,h_b}}$$

și analoageie ei; în cari inlocuind înălțimile prin valorile din (1) avem:

$$a=\frac{r_a\,(r_b+r_c)}{\sqrt{\Sigma\,r_a\,r_b}}$$

și analoagele ei.

Din relația cunoscută:

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}$$

avem:

$$r=\frac{r_a\,r_b\,r_c}{\Sigma\,r_a\,r_b}.$$

și cum sunt cunoscute și:

$$p=\sqrt{\Sigma\,r_a\,r_b}\quad;\quad s=p\,r\,,$$

obținem formula suprafeței triunghiului:

$$s=\frac{r_a\,r_b\,r_c}{\sqrt{\Sigma\,r_a\,r_b}}$$

Din relația:

$$(\Sigma\,r_a)-r=4\,R$$

avem:

$$R=\frac{1}{4\,\Sigma\,r_a\,r_b}\left[(\Sigma\,r_a\cdot\Sigma\,r_a\,r_b)-\Pi\,r_a\right],$$

sau din formula stabilită de Dl *Coșniță:*

$$R=16\,\frac{r_a^3\,r_b^3\,r_c^3}{\sqrt{\Sigma\,r_a\,r_b}\,\Pi\,(r_a+r_b)}$$

Din formulele cos A, sin A stabilite în suscitatul articol avem:

$$\sin A=\frac{4\,r_a\sqrt{\Sigma\,r_a\,r_a}}{(r_b+r_c)\,\Pi\,(r_a+r_b)}$$

$$\cos A=\frac{2\left[r_a^2\,r_c^2+(r_a+r_c-r_b)\,r_a\,r_b\,r_c\right]}{(r_a+r_b)\,(r_a+r_c)}$$

și analoagele lor.

Pentru sinusurile, cosinusurile și tangenta unghiurilor pe jumătate avem:

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{2\,r_a}{\sqrt{(r_a+r_b)\,(r_a+r_c)}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{4}{r_b+r_c}\sqrt{\frac{r_b\,r_c\,\Sigma\,r_a\,r_b}{(r_a+r_b)\,(r_a+r_c)}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r_a\,(r_b+r_c)}{2\sqrt{r_b\,r_c\,\Sigma\,r_a\,r_b}}.$$

Bisectoarele interioare și exterioare se deduc din formulele:

$$I_a=\frac{2\sqrt{p\,(p-a)\,b\,c}}{b+c}\quad,\quad I'_a=\frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)(p-c)\,b\,c}$$

și analoagele lor:

$$I_a = \frac{2\sqrt{r_a r_b r_c^2 (r_a + r_b)(r_a + r_c)\sum r_a r_b}}{r_b(r_a + r_c) + r_c(r_a + r_b)\sum r_a r_b} =$$

$$\frac{2\sqrt{r_a r_b r_c^2 (r_a + r_b)(r_a + r_b)(r_a + r_c)}}{(r_b(r_a + r_c) + r_c(r_a + r_b))\sqrt{\sum r_a r_b}}$$

$$I'_a = \frac{r_a r_b r_c}{\sum r_a r_c}\sqrt{(r_a + r_c)(r_a + r_b)}$$

In acelaş mod deducem şi analoagele lor.

Din formulele cunoscute:

$$J_a = \sqrt{\frac{b\,c\,(p-a)}{p}}\ ,\ J'_a = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{b\,c\,(p-a)}{p}}$$

şi cu celelalte obţinute prin permutări circulare obţinem pentru segmentele de bisectoare cuprinse între vârfuri şi centru cercului inscris precum şi segmentele cuprinse intre centru cercului inscris şi picioarele lor, următoarele formule:

$$J_a = r_b r_c\sqrt{\frac{(r_a + r_b)(r_a + r_c)}{\sum r_a r_b}}$$

$$J'_a = \frac{r_a r_b r_c (r_b + r_c)}{r_b(r_a + r_c) + r_c(r_a + r_b)}\sqrt{\frac{(r_a + r_b)(r_a + r_c)}{\sum r_a r_b}},$$

precum şi analoagele lor.

Medianele şi simedianele le avem astfel:

$$s_a = \frac{b\,c}{b^2 + c^2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} =$$

$$\frac{r_b r_c (r_a + r_b)(r_a + r_c)}{r_b^2(r_a + r_c)^2 + r_c^2(r_a + r_b)^2}\sqrt{\frac{3 r_b^2 r_c^2 + \sum r_a^2 r_b^2}{\sum r_a r_b}}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3 r_b^2 r_c^2 + \sum r_a^2 r_b^2}{\sum r_a r_b}}$$

Pentru aflarea unghiului *Brocard* ne folosim de formula stabilită în sus citatul articol şi avem:

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{\sum r_a^2 (r_b + r)^2}{r_a r_b r_c \sqrt{\sum r_a r_b}}$$

NOTE MATEMATICE

25. — *Generalizarea unei probleme de examen.* Problema de algebră propusă la examenul de admitere în anul pregătitor dela Şc. Polit. Timişoara din Octombrie 1931, se poate generaliza şi anume în loc de trei copii se consideră n copii, iar în coş au rămas n mere după ce copii şi-au luat partea lor. (A se vedea enunţul la pag. 90 R. M. T. an. c.).

In acest caz problema se rezolvă astfel:

Fie x numărul merelor ce se găsesc la început în coş.

Primul copil, conform enunţului primeşte:

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{x+4}{2} \text{ mere}$$

al doilea:

$$\frac{x - \frac{x+4}{2}}{2} + 2 = \frac{x+4}{2^2} \text{ mere}$$

. . . . . .

al n-lea primeşte:

$$\frac{x - \left(\frac{x+4}{2} + \frac{x+4}{2^2} + \cdots + \frac{x+4}{2^{n-1}}\right)}{2} + 2$$

$$= \frac{x+4}{2^n} \text{ mere.}$$

Scriind că numărul merelor primite de copii, plus cele n mere rămase în coş, este egal cu numărul merelor ce au fost în coş, avem ecuaţia în x:

$$\frac{x+4}{2} + \frac{x+4}{2^2} + \cdots + \frac{x+4}{2^n} + n = x$$

de unde:

$$x\left(1 - \frac{2^n - 1}{2^n}\right) = \frac{2^n + n\,2^{n-2} - 1}{2^{n-2}},$$

iar de aci avem valoarea lui x:

$$x = 4(2^n + n\,2^{n-2} - 1)$$

Pentru $n = 3$ avem:

$$x = 52$$

TEODOR MARSIEU

26. — *Asupra problemelor, 28 şi 34 din C. d. P. Cap. V.*

28. *Prin vârfurile triunghiului* A B C, *se duc trei ceviene paralele* A A′, B B′, C C′. *Izogonalul*

punctului dela infinit al direcției acestor ceviene, se află pe cercul A B C.

Iată o demonstrație care nu necesită cunoștința dreptei lui *Simson*:

Izogonala cevienei A A′ taie cercul M. $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MAC$, $\sphericalangle B'BA = \sphericalangle A'AB$; dar $\sphericalangle MAC = \sphericalangle A'AB$, deci $\sphericalangle MBC = \sphericalangle B'BA$ și cevienele BB′, BM sunt izogonale.

34. *Dreptele lui Simson ale unui punct* P *în raport cu triunghiurile* A B C, A′ B′ C′ *înscrise în același cerc, fac între ele un unghiu constant.*

Demonstrația următoare, nu face apel la cunoașterea probl. 28 și 29 V. (l. c.).

Perpendicularele din P pe BC și B′C′ taie cercul în P′ și P″. Fie $N \equiv (AP', A'P'')$ și $M \equiv (BC, B'C')$.

Se știe că unghiul dreptelor lui *Simson*, este egal cu $\sphericalangle P'NP'' =$ măs arc $\frac{P'P''}{2} +$ măs arc. $\frac{AA'}{n}$. Dar arc $AA' = C^t$, iar măs arc $\frac{P'P''}{2} = \sphericalangle P'PP'' = 180^0 - B'MC = C^t$.

N. MIHAILEANU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVII, N^O 5, Ianuarie 1932. Sur une analogie entre le parallélogramme et le parallélipipède, par *V. Thébault*. Asupra unor serii cu termeni complexi, de *George Călugăreanu*. Articol de geometrie (urmare și sfârșit), de *D. Barbelian*.

2. *Bulletin de Mathématiques et de Physique pure et appliqués, de L'école Polytechnique „Roy Carol II", Bucarest*. (Fasc 6 anul II, N^O 3, 1931—1932). Le théorème des accroissements finis et les fonctions holomorphes, par *D. Pompeiu*. Sur les formules de quadrature à nombre minimum de termes, par *L. Tchakaloff*. Sur le théorème de *Rolle*, par *M. Birnacki*. Sur la moyenne des fonctions paraboliques, par *Ernest Abason*. Sur une remarque de *D. Pompeiu*, par *D. V. Ionesco* Sur l'interprétation de l'opérateur α_i de *Dirac*, par *Al. Proca*. Méthode pour la séparation qualitative du zinc d'alluminium par, *Eugène Chirnoagă*. Sur les raies ultimes, par *Tr. Negresco*. Contribution à l'étude des spectres hydrodynamiques, par *D. Pavel*. Notice sur le calcul symbolique de *Héaviside*, par *J. Constantinesco*. La formation de l'ingénieur en France, par *Léon Guillet*. L'école Polytechnique *„Roi Carol II"* à l'exposition international d'aéro — autoradio — electricité de Bucarest, par *A. D. Popescu*.

3. *Boletin Matematico*, publicat de *Dr. Bernardo I. Baidaff*, anul IV, Decemvrie 1931. Sucesiunea terminilor liniari și omogeni recurenți, de *B. I. Baidaff*. Proveniența Buletinului Matematic, de *B. I. Baidaff*.

4. *Revista Brasileira de Matematica*, anul 3, N^O 2—3. August — Noemvrie, 1931. *François Viète de Maurice d'Ocagne*. Știință și artă, de *Agliberto Xavier*. Incercarea unei teorii concrete a numerilor relative, de *S. Sodré da Gama*. Formula lui *Fourier*, de *I. M. Azevedo do Amaral*. Noua orientare de învățare a matematicilor elementare în cursul secundar, de *Nivaldo Reis*. Rezolvirea grafică a unei ecuațiuni trigonometrice, de *J. C. Mello e Souza*.

PROBLEME REZOLVATE

1003. — *Să se stabilească identitatea*[1]):

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3} + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\pi}{3} + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha-2\pi}{3} = 9\operatorname{tg}^2\alpha + 6$$

V. ALACI

Prima soluție: Observăm că putem scri succesiv:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} + \operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\alpha-2\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}} =$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} - 3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{3} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} - \sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3} - \sqrt{3} + 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3} + \sqrt{3} + 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}}{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}} = \frac{9\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} - 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}$$

Ținând seamă de formula care ne dă pe $\operatorname{tg}\alpha$ în funcție de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$, avem:

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} + \operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\alpha-2\pi}{3} = 3\operatorname{tg}\alpha$$

De asemenea putem scri succesiv:

[1]) Enunț rectificat.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha-2\pi}{3}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}-\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}}+$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}}+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}-3}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}=$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}-\sqrt{3}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{3}-\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}+3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}+\sqrt{3}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{3}+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}+3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}-3}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$\frac{9\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}-3}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

deci:

$$(2)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha-2\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha-2\pi}{3}=-3$$

Ridicând relația (1) la patrat și scăzând apoi relația (2) înmulțită cu 2, obținem:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\pi}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-2\pi}{3}=9\operatorname{tg}^2\alpha+6,$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluție dată de d-l: *Neufeld Pavel.*

Soluția a 2ª. Considerăm ecuația:

$$(3)\qquad x^3-3\operatorname{tg}\alpha.x^2-3x+\operatorname{tg}\alpha=0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$x=\operatorname{tg}\frac{\alpha-k\pi}{3},\quad (k=0,1,2)$$

(A se vedea. G. M. T. an. XI No 3).

Scriind suma rădăcinelor și suma produselor câte două a rădăcinilor ecuației (3), în funcție de coeficienți, avem:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}+\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\alpha-2\pi}{3}=3\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha-2\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha-2\pi}{3}=-3$$

Scăzând din prima relație dublul celei de a 2ª, avem:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\pi}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-2\pi}{3}=9\operatorname{tg}^2\alpha+6,$$

care este identitatea dată.

Soluții date de d-nii: *Boerescu George* (lic. Oltenița), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Motoc I. Mircea* (lic. Oltenița) și *Mihaileanu N. N.* (lic., Constanța).

Observare. D-l *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), a verificat numai identitatea dată, pentru valori particulare a lui α.

1022. — *Să se arate că în orice triunghiu există relația:*

$$1+\cos A\cos B\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2},$$

notațiile fiind cele obicinuite.

CEZAR IVANESCU

Din relațiile cunoscute într'un triunghiu:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

deducem:

$$(1)\qquad \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$$

De altă parte se cunoaște relația:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C,$$

C. de Pr. Cap. XVII, astfel că relația (1) se mai poate scri:

$$1+\cos A\cos B\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2},$$

care este tocmai relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Acikghenian N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Boerescu P. George*, *Boeriu Valer* (Șc. Polit., Timișoara), *Dan T. Traian* (Beiuș), *Dăscălescu Șt. Hris-*

tache (student, Bucureşti), *Dumitrascu N. Romeo* (bacalaureat, Roman), *Fofiu Cornel* (lic., Beiuş), *Grinberg N. Meer* (student, Iaşi), *Lupescu Gh. C-tin* (bacalaureat, Roman), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Motoc D. M.* (lic., Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Parepeanu C. I.*, *Păsculescu Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Pop I. Leontin* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Popescu Alexandru* (Şc. Polit., Timişoara), *Predoiu Fl.* (Şc. Navală), *Purcel At.* (Şc. Polit, Timişoara), *Roşca Şt. Veronica* (Craiova), *Rusu D. C-tin* (absolvent lic.,Constanţa), *Şerban Teodor*, *Tica Marin* (bacalaureat). *Triscă S. Ion* (Constanţa) şi *Weismann Mauriciu* (bacalaureat, Constanţa).

1024. — *Un călător pleacă cu trenul personal de la Craiova spre Timişoara. Pe drum îşi aduce aminte că a uitat acasă nişte acte. La Severin întâlneşte acceleratul care merge spre Bucureşti. Se duce în accelerat şi ajunge înapoi la Craiova cu o oră mai repede de cât s'ar fi dus cu personalul. Ce distanţă este în kilometri între Craiova şi Severin dacă viteza mijlocie a personalului este 502 m. pe minut, iar a acceleratului este 685 m. pe minut?*

I. DUMITRIU-DADA

Fie x distanţa în kilometri între Craiova şi Severin şi t timpul în minute, în care acceleratul ar parcurge această distanţă.

Ţinând seamă de enunţ, putem scri:

(1) $$x = 0.685\,t = 0,502\,(t+60)$$

De aci deducem:

$$0.183\,t = 30,12$$

$$t = \frac{30120}{183} = 164,59 \text{ minute.}$$

Atunci din (1) obţinem:

$$x = 0.685 \times 164,59 = 112,744 \text{ km.}$$

Distanţa cerută între Craiova şi Severin este deci 112,744 km.

Soluţii date de corespondenţii: *Boeriu Valer* (Şc. Polit., Timişoara), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Dăscălescu Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin* (lic. Naţional, Iaşi), *Dumitraşcu N. Romeo* (bacalaureat, Roman), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Grigorescu Decebal* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Grinberg N. Meer* (student, Iaşi), *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mihăileanu Lucia* (lic. Constanţa), *Nagler Mayer* (lic. Naţional, Iaşi), *Petrică I. Ion* (Şc. de Con-ductori-Technici, Cluj), *Popa Gh. Ioan* (student, Bucureşti), *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu I. Marin* (lic. Fraţii Buzeşti, Craiova), *Purcel At.* (Şc. Polit., Timişoara), *Roşca St. Veronica* (Craiova), *Rusu D. C-tin* (Constanţa), *Stănescu-Brezuica D.* (Caracal), *Stoicescu I. Enest* (bacalaureat, Bucureşti), *Tica P. Marin* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Triscă S. Ioan* (Constanţa).

1025. — *Să se determine a astfel ca ecuaţia:*

$$\sqrt[3]{3x - 3\sqrt[3]{3x^3 - 33x^2 + 33x - 33a}} = 3,$$

să admită o rădăcină egală cu 3 şi să se rezolve în acest caz ecuaţia.

TEODOR MARSIEU

Ridicând la cub ecuaţia dată, avem:

$$3x - 3\sqrt[3]{3x^3 - 33x^2 + 33x - 33a} = 27,$$

sau:

$$\sqrt[3]{3x^3 - 33x^2 + 33x - 33a} = x - 9$$

Ridicând la cub şi ordonând în raport cu x, obţinem:

(1) $$2x^3 - 6x^2 - 210x + 729 - 33a = 0$$

Pentru ca această ecuaţie să admită rădăcina 3, trebuie să avem:

$$54 - 54 - 630 + 729 - 33a = 0,$$

deci:

$$a = 3$$

Inlocuind această valoare în (1), obţinem simplificând prin 2:

$$x^3 - 3x^2 - 105x + 315 = 0$$

sau:

$$(x-3)(x^2 - 105) = 0$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt:

$$x_1 = 3,\ x_2 = \sqrt{105},\ x_3 = -\sqrt{105}$$

Singura rădăcină care verifică ecuţia dată este $x = 3$.

Soluţii date de d-nii: *Boerescu George* (lic. Oltenita), *Boeriu Valer* (Şc. Polit., Timişoara), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (bacalaureat, Chişinău), *Dan T. Traian* (lic. Beiuş), *Dăscălescu Şt Hristache* (student, Bucureşti), *Dumitraşcu N. Romeo* (bacalaureat, Roman), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Gall Tica* (Şc. Milit. de Art.), *Griuberg N. Meer* (student, Iaşi), *Ioanin C. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Jeba C. C-tin*

(Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C.* (bacalaureat, Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Motoc D. M.* (lic. Oltenita), *Parepeanu C. I.*, *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Pop I. Leontin* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit, Timişoara), *Predoiu Fl.* (Şc. Navală), *Purcel At.* (Şc. Polit., Timişoara), *Rusu D. C-tin* (Constanţa), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Stan I.*, *Stoicescu I. Ernest* (bacalaureat, Bucureşti) şi *Triscă S. Ioan* (Constanţa).

Observare. S'a primit şi o soluţie neiscălită.

PROBLEME PROPUSE

1071. — Să se găsească patratul perfect de trei cifre, ştiind că suma cifrelor lui care este patrat perfect, este jumătatea rădăcinei patratului cerut.

MIRCEA CONSTANTINESCU

1072. — Să se găsească două numere A şi B cunoscând că cel mai mic multiplu comun al lor este 168 şi că $\frac{A^3+B^3}{AB(A+B)}$ este egal cu $\frac{13}{12}$.

CEZAR IVANESCU

1073. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{y^3(x^6-1)+2xy^2(x^4y^2-1)+x^2y(x^2y^4-1)}{y^3(x^6-1)+3xy^2(x^4y^2-1)+3x^2y(x^2y^4-1)+x^3(y^6-1)}=\frac{y(x^4y^2-1)}{(x+y)(x^3y^3-1)}$$

V. ALACI

1074. — Un călător pleacă pe jos din oraşul A spre comnna B aşezată la distanţa de 10 km. de A. Când ajunge la 2 km. de A îl ajunge poşta rurală care plecase din A spre B. Poşta trece înainte, ajunge în B, stă în B un sfert de oră, se întoarce spre A, întâlneşte călătorul la 2 km. de B şi ajunge în A cu o jumătate de oră după ce călătorul ajunge în B. Care este viteza călătorului şi a poştei rurale?

I. DUMITRIU-DADA

1075. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=3 \\ x^3+y^3+z^3-3xyz=18 \\ x^2y^2z+y^2z^2x+z^2x^2y=66 \end{cases}$$

GEORGE BOERESCU

1076. — Dacă în patrulaterul inscriptibil ABCD, avem AB = BC, P fiind punctul de intersecţie al diagonalelor, atunci există relaţia:

$$\overline{BC}^2=\overline{BP}\times\overline{BD}.$$

LADISLAU BENICZKY

1077. — In triunghiul ABC, fie A_1, B_1, C_1 picioarele a trei ceviene. Paralele duse din B_1, C_1 la CC_1, BB_1 se taie în I_a şi taie laturile AB şi AC în C_a şi B_a. Să se demonstreze că:

1°. Dacă I_a, I_b, I_c sunt puncte analoage, triunghiul $I_aI_bI_c$ este omologic cu triunghiul ABC şi omotetic cu triunghiul $A_1B_1C_1$.

2°. Dacă $B_a, C_a, A_b, C_b, A_c, B_c$ sunt puncte analoage, triunghiul dreptelor B_aC_a, A_bC_b, A_cB_c este omologic cu triunghiul $A_1B_1C_1$ şi omotetic cu triunghiul ABC.

SUB.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU

1078. — Ştiind că x, y, z sunt unghiurile unui triunghiu se cere să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{4} \\ \cos x+\cos y+\cos z=\sqrt{2} \\ \sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=2 \end{cases}$$

CEZAR IVANESCU

Observare. Enunţul problemei 1023 trebuie rectificat astfel:

1023. — *Să se arate că dacă n este impar, expresiunea:*

$$1946^{3n-2}+3^{6n+9}+32^3\times 729^n+1,$$

se divide cu 59.

CEZAR IVANESCU

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE

a) Algebră

V. Claudian — Sisteme de ecuaţiuni şi identităţi algebrice 4, 13
V. Alaci — O clasă de ecuaţiuni cu rădăcini reale 25
C. Cosniţă — Asupra unor identităţi . . . 97
V. Alaci — O clasă de identităţi deduse prin desvoltări în serii. Împărtirea directă a două polinoame. Aplicaţli 122

b) Geometrie

V. Claudian — Asupra unei probleme de geometrie 37
C. Cosniţă — Câteva proprietăţi ale unor triunghiuri omologice 85
C. Cosniţă — Proprietăţi în legătură cu un sistem de cercuri 109

c) Geometria analitică

V. Claudian — Asupra unei probleme de geometrie 49

d) Trigonometrie

T. Marşieu — Câteva identităţi trigonometrice 61
V. Alaci — Asupra unor identităţi trigonometrice 73
H. Ionescu — Exprimarea elementelor unui triunghiu în funcţie de razele cercurilor exînscrise . . . 133

Diverse

Lista Comitetului Revistei . . 1—2
* * * Cuvânt inainte 3
Observare. Numele autorului Notei No. 14 dela pag. 67 78

II. NOTE MATEMATICE

1. **Col. Gh. Buicliu** — Teorema Van Aubel 6
2. **Al. Niculescu** — Asupra unei relaţii (Van Aubel) 15
3. **(†) Tr. A. Dordea** — O scurtă privire asupra istoricului Semnelor algebrice 15
4. **Ioan Gh. Popa** — Dreapta lui Euler în funcţie de înălţimi şi de razele cercurilor exînscrise 17
5. **Al. Niculescu** — Aplicaţie a unei teoreme în legătură cu teorema lui Pappus 29
6. **V. Claudian** — Asupra unui sistem de ecuaţiuni 29
7. **N. Mihăileanu** — Asupra triunghiurilor în care avem: $a=h_a, b=h_b, c=h_c$ 30
8. **V. Alaci** — Asupra unor determinanţi . . 40
9. **St. Musta** — Asupra unui exerciţiu 41
10. **V. Alaci** — Asupra notei lui (†) Traian Dordea R. M. T. an. XI No. 2 pag. 15—16 42
11. **St. Musta** — Asupra unei relaţii (V. Aubel) 50
12. **A. Purdilă** — Asupra teoremei V. Aubel . 50
13. **C. Coşniţa** — Generalizarea problemei 838 din R. M. T. 51
14. **Th. Marşieu** — Asupra unor identităţi . . . 67
15. **N. Mihăileanu** — Generalizarea problemelor 861 şi 931 R. M. T. 68
16. **Gh. Buicliu** — Asupra problemei 937 R. M. T. 78
17. **C. Ionescu-Bujor** — Asupra reciprocii teoremei lui Pappus 79
18. **C. Ionescu-Bujor** — Asupra problemei 937 R. M. T. 89
19. **N. Mihăileanu** — Asupra unei relaţii Van Aubel 90
20. **C. Coşniţă** — Asupra unui articol 99
21. **E. Mereuţă** — Asupra unei probleme de Algebră Superioară 100
22. **T. Marşieu** — Calculul coeficienţilor binomului lui Newton din patru în patru 100
23. **T. Marşieu** — O metodă pentru însumarea unor expresiunii algebrice . 113
24. **M. Grünbaum** — Corespondenţe remarcabile rezultând dintr'o nouă construcţie a 2 puncte inverse 125
25. **Teodor Marşieu** — Generalizarea unei probleme de examen 134
26. **N. N. Mihăileanu** — Asupra problemelor 28 şi 34 C. de P. Cap. V. 134

III. BIBLIOGRAFII

Radu Bădescu — Singularités des solutions d'une classe d'équations intégrale 18
Radu Bădescu — Sur une équation fonctionnelle 18
Boletin Matematico — 7, 18, 42, 79, 101, 115, 135 . .
Buletinul „Societăţii de Matematici" a clasei a IV a liceului „Tasse Dumitrescu" din Mizil . 42
Bulletin de Mathématiques et de Physique, pures et appliquées de l'école Polytechnique „Roi Carol II" Bucarest 68, 135
Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara 101
D. Cazancli — Ioan Popp, primul profesor de Geometria Analitică la Universitatea din Iaşi 31
Godofredo Garcia — Ecuaţiuni cardinale. Ecuaţiunile universale. Complecte ale Dimamicei 79
Gordofredo Garcia — Teorema generalizată a acceleraţiei şi a mişcărei compuse 79
M. Grünbaum — Contribuţiuni la Geometria triunghiului 126
Gazeta Matematică — 7, 18, 31, 42, 52, 68, 79, 90, 101, 115, 126, 135 . . . .
I. Karamata — Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze 7
T. Levi-Civita — Sugli invarianti adiabatici . . 7
T. Levi-Civita — Über dynamische Beanspruchung — elastischer — Systeme 7
T. Levi-Civita — Sui potenziali newtoniani dovuti a distribuzioniche si estendono illimitamente . . 7
Şt. Mateescu — Date noui asupra structurei geologice a depresiunei Zalăului 7
Mathematica — 7, 101 . . . . . .
Moisil C. Gr. — Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la Physique Mathematique 68
Moisil C. Gr. — Sur les réperes mobiles dans l'espace fonctionnel 68
Moisil C. Gr. — Sur l'équation $\Delta u = 0$ . . . 68

Moisil C. Gr.	Sur la mécanique ondulatoire des champes d'ondes . . .	68
M. Nicolesco	Sur une théorème de M. Pompeiu	42
M. Nicolesco	Sur les équations différentielles linéaires	42
M. Nicolesco	Sur les nombres complexes à quatre coordonées	42
M. Nicolesco	Applications d'une développement en série	42
M. Nicolesco	Sur quelques systémes aux dérivées partielles	42
M. Nicolesco	Sur certaines transformations ponctuelles de l'espace à quatre dimensions	42
M. Nicolesco	Sur le théorème de Sturm .	42
M. Nicolesco	Sulle funzioni metaarmonische in n varubili	42
M. Nicolesco	Sur les fonctions conjuguées sur une surface, au sens de Beltrami	43
M. Nicolesco	Sur l'ntégration orientée des équations différentielles non analytiques	43
M. Nicolesco	Théorèmes de moyenne pour les fonctions de deux variables réelles	43
M. Nicolesco	Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace . . .	43
Gh. Niculescu	O variabilă importantă în combustiunea motoarelor de aviaţie	52
Gh. Niculescu	Dimensionarea unui Aerodrom	52
Revista de Ciencias	79, 115	
Revista Brasileira de	**Matematica ano 3 No. 1**, 126,	135
Giovanni Ricci	Sulle funzioni simetriche di interi constituenti uno o più sist mi diresti, secondo un modulo composto	31
Giovanni Ricci	Sulle somme delle potenze simili degl'interi naturali e sui coefficienti del fattorialle	31
Ion Schileru	Măsurătoarea industrială a rezistenţelor cu metoda Volt-Ampermetrică	7
Petre Sergescu	Evoluţia concepţiei despre univers	7
Petre Sergescu	L'évolution des principes de la mécanique de Newton à Laplace	7
Petre Sergescu	Sur les zéros des polynomes	7
Petre Sergescu	Le premiér congrés des Mathématicièns roumains . . .	7
C. Teodorescu	Un probléme de flambage .	7

IV. CHESTIUNI DE EXAMEN

Şcoala Politechnică Timişoara.	Examenul de admitere în anul pregătitor, Octombrie 1931 .	90

V. INFORMAŢIUNI

VI. PROBLEME REZOLVATE ŞI PROPUSE

Probleme rezolvate anterior dar din greşală au fost trecute în tabla de materii a volumului X ca nerezolvate. — No. 1) arată numărul problemei propuse, 2) pagina la care a fost rezolvată, 3) volumul.

1).	2).	3).
120	105	II.
198	79	X.
212	82	X.
213	83	„
214	83	„
635 bis	10	VIII.
746	173	„
777	92	IX.
779	34	„
787	93	IX.
815	93	II.
816	94	IX.
819	105	„
821	95	„
826	121	„

Probleme rezolvate în vol. XI — Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XI. Problemelor care nu au nimic publicat în coloana 4) încă nu li-sa publicat soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I.	
50	110	„	
54	126	„	
69	142	„	
88	174	„	
91	187	„	
92	187	„	
98	187	„	
99	187	„	
100	14	II.	
109	14	„	
110	14	„	
114	30	„	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	
150	78	„	
154	78	„	
156	94	„	
157	94	„	
161	94	„	
162	94	„	
163	94	„	
164	94	„	
165	94	„	
174	110	„	
175	110	„	
176	126	„	
178	126	„	
184	126	„	
185	126	„	
186	142	„	
191	142	„	
194	142	„	
195	142	„	
199	158	„	
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III.	
235	30	„	
243	46	„	
244	46	III.	
248	46	„	
253	62	„	
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	
268	78	„	
275	94	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	142	„	
299	142	„	
310	174	„	
313	174	„	
315	174	„	
317	174	„	
319	185	„	
334	14	IV.	
335	14	„	
336	14	„	
343	30	„	
344	30	„	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	
393	126	„	
401	142	„	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V.	
440	30	„	

1).	2).	3).	4).
442	30	V.	
444	30	„	
445	46	„	
450	46	„	
458	62	„	
460	62	„	
462	62	„	
478	94	„	
479	94	„	
481	190	„	
485	110	„	
489	126	„	
507	158	„	
514	174	„	
515	174	„	
516	174	„	
518	190	„	
519	190	„	
524	190	„	
527	14	VI.	
528	14	„	
531	14	„	
	122	IX.	
535	30	VI.	
537	30	„	
541	46	„	
542	46	„	
543	46	„	
544	46	„	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
558	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
592	142	„	7
	86	VII.	
606	174	VI.	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII.	
628	38	„	
	118	„	
634	54	„	
635	54	„	
639	54	„	
646	70	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
657	102	„	
658	102	„	
667	134	„	
668	134	VII.	
695	190	„	
753	110	VIII.	
762	126	„	
764	126	„	115
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
778	158	„	9
782	174	„	
794	190	„	
800	12	IX.	116
812	36	„	116
813	36	„	
820	48	„	9
823	48	„	
832	60	„	
847	84	„	
851	96	„	
853	96	„	
858	108	„	
860	108	„	
863	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
882	144	IX.	
889	12	X.	
890	12	„	117
893	12	„	118
898	24	„	
899	24	„	18
902	24	„	43
907	36	„	101
908	36	„	
910	36	„	19
913	48	„	118
914	48	„	68
915	48	„	79
	120	„	
916	48	„	
917	48	„	
918	48	„	19
923	60	„	
924	60	„	
925	60	„	21
928	72	„	52
929	72	„	
930	72	„	43
933	72	„	22
937	84	„	69
938	84	„	
939	84	„	
940	84	„	44
941	84	„	11
943	96	„	53
945	96	X.	45
946	96	„	53
948	96	„	32
949	96	„	33
950	96	„	54
951	107	„	
952	107	„	45
	120	„	
953	107	„	
954	108	„	
955	108	„	23
956	108	„	
957	108	„	54
958	108	„	55
959	108	„	23
960	120	„	56
961	120	„	
962	120	„	57
963	120	„	
964	120	„	34
965	120	„	24
966	120	„	34
967	132	„	35
968	132	„	46
969	132	„	35
970	132	X.	102
971	132	„	
971 bis	132	„	
972	138	„	47
973	138	„	58
974	138	„	
975	138	„	58
977	138	„	91
978	138	„	70
979	138	„	
980	12	XI.	47
981	12	„	59
982	12	„	
983	12	„	81
984	12	„	
985	12	„	83
986	12	„	83
687	12	„	92
988	12	„	92
989	24	„	
990	24	„	93
991	24	„	94
992	24	„	
993	24	„	
994	24	„	103
995	24	„	94
996	24	„	127
997	36	„	104
998	36	„	105
999	36	„	95
1000	36	XI.	
1001	36	„	
1002	36	„	
1003	36	„	135
1004	36	„	
1005	48	„	105
1006	48	„	106
1007	48	„	106
1008	48	„	
1009	48	„	
1010	48	„	107
1011	48	„	107
1012	48	„	
1013	60	„	
1014	60	„	127
1015	60	„	128
1016	60	„	129
1017	60	„	
1018	66	„	
1019	60	„	130
1020	60	„	131
1021	60	„	131
1022	60	„	136
1023	72	„	
1024	72	„	137
1025	72	„	137
1026	72	„	
1027	72	„	
1028	72	„	
1029	72	„	
1030	72	„	
1031	84	„	
1032	84	„	
1033	84	„	
1034	84	„	
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1038	84	„	
1039	96	„	
1040	96	„	
1041	96	„	
1042	96	„	
1043	96	„	
1044	96	„	
1045	96	„	
1046	96	„	
1047	108	„	
1048	108	„	
1049	108	„	
1050	108	„	
1051	108	„	
1052	108	„	
1053	108	„	
1054	108	„	

1).	2).	3).	4).
1055 .	120 .	XI.	
1056 .	120 .	„	
1057 .	120 .	„	
1058 .	120 .	„	
1059 .	120 .	„	
1060 .	120 .	„	
1061 .	120 .	„	

1).	2).	3).	4).
1062 .	120 .	XI.	
1063 .	132 .	„	
1062 .	132 .	„	
1063 .	132 .	„	
1064 .	132 .	„	
1065 .	132 .	„	
1066 .	132 .	„	

1).	2).	3).	4).
1067 .	132 .	XI.	
1068 .	132 .	„	
1069 .	132 .	„	
1070 .	132 .	„	
1071 .	138 .	„	
1072 .	138 .	„	
1073 .	138 .	„	

1).	2).	3).	4)
1074 .	138 .	XI.	
1075 .	138 .	„	
1076 .	138 .	„	
1077 .	138 .	„	
1078 .	138 .	„	

TABLOUL NUMELOR)

Abason E., 1, 68, 135.
Abramescu N., 1, 36, 68, 96, 102.
Acikgheozian N., 105, 136.
Adam D. R., 1.
Adamachi V., 7.
Alaci V., 1, 3, 12, 13, 19, 24, 25, 33, 36, 37, 41, 42, 48, 49, 55, 57, 60, 61, 70, 72, 73, 80, 84, 85, 96, 97, 101, 103, 108, 110, 115, 116, 120, 121, 131, 132, 133, 135, 138.
Alencov A., 126.
Alexandrescu Elena, 1.
Alexandrescu N., 18, 43.
Almajan P., 9.
Anastasiade I., 1.
André D., 123.
Andrei I. V., 59.
Andronescu P., 1.
Anghelescu A., 1.
Angheluță Th., 1, 7.
Antonescu P. A., 18, 43.
Appell P., 7.
Ardelean Șt., 1.
Arghir I., 1.
Asteleanu V., 59, 82, 94.
Van Aubel, 6, 15, 50, 90.

Bakony C., 1.
Balaban Gh., 1.
Balaban N., 1.
Balas D., 1.
Banciu I., 1.
Barbilian D., 115, 126.
Baron C., 1.
Barron, 16.
Băcicov P. B., 9, 18, 21. 43, 71, 82, 83, 92, 120.
Băcicov P. V., 21, 71, 82, 83, 92.
Bădescu R., 18.
Bădulescu V., 1.
Băleanu N., 23, 24, 34, 45, 46, 57, 59.
Bănărescu M., 1.
Bărglăzan A., 1.
Beltrami, 43.
Beniczki L., 138.
Beral H., 12, 23, 32, 34, 35, 45, 46, 47, 56, 58, 59, 71.
Bernoulli, 16.
Bézout, 7.
Biernacki M., 101.
Bimbulov N., 55.
Blașian V., 1.
Bloch A., 101.
Bobârnac M., 1.
Boca V., 55.
Boerescu P. G., 34, 35, 45, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 69, 83, 94, 95, 104, 106, 107, 120, 136, 137, 138.
Boeriu V., 103, 105, 107, 108, 127, 128, 130, 132, 137.
Bojan A., 59, 82, 93.
Bombelli, 16.
Borneanu G., 68.
Botea N. G. 88, 89.
Botez M., 1.
Boutin, 126.
Bratu Gh. 1.
Breazu D., 1.
Brocard, 134.
Brotman I., 9.
Bugeanu O., 18.
Buicliu Gh., 1, 7, 15, 24, 48, 50, 79. 84.
Bujoreanu V., 18, 35, 46, 53, 69.
Burghele B., 1.
Bustamante F. M., 42.
Butoescu T., 1.

Capriel H., 42.
Caraman E., 1.
Carp Ig., 116.
Cartan E., 7.
Catona V., 1.
Cauchy, 79, 115.
Cazanchi D., 31, 42, 116.
Călnicean C., 1.
Călugăreanu G., 135.
Campas O. V., 126.
Cândea C, 1.
Cârdeiu V., 1.
Ceanșescu V., 35, 47.
Ceva, 70.
Charpentier, 101.
Chirică A. M., 128.
Chirilă A., 94, 106, 107, 128, 130.
Chivu S. I., 23, 46, 56.
Chivulescu C., 1.
Cica Gh., 1.
Cincilian A., 12, 23, 55, 94, 95, 104, 105.
Ciorănescu N., 7.
Cismărescu M., 1.
Ciurceu V., 1.
Claudian V., 4, 13, 30, 37, 49.
Coandă V., 94, 137.
Coca A., 1.
Codreș I. F., 21, 81, 82.
Cojocaru V. I., 80, 82, 83, 84, 92, 94, 95, 103, 105, 106, 107, 108, 127.
Cojori F., 42.
Coman A., 1, 91, 96.
Constantinescu Gh., 1, 31.
Constantinescu M., 12, 23, 34, 35, 46, 47, 53, 55, 56, 58, 59, 60, 82, 84, 94, 108, 120, 127, 138.
Contrea A., 1.
Cornean P., 1.
Cortan E., 7.
Corti S. Don José 79.
Costăchescu C. C., 47, 58, 59.
Costăchescu N. T., 57.
Costăchescu T., 46.
Costăchescu V. C., 12, 23, 24, 36, 46, 71, 83, 94.
Coșniță C., 6, 9, 11, 15, 18, 48, 50, 52, 60, 70, 72, 83, 84, 85, 97, 100, 108, 109, 120, 129, 133.
Cramer 81.
Crețu C., 46.
Cristalopol C. I., 106, 107, 128, 130.
Cristescu I., 1.
Cristescu V., 7.
Cristescu P. I. C., 72, 82, 83.
Cristodulo N., 1.
Crivăț I. V., 12, 18, 21, 45, 47, 52, 53, 54, 69, 102, 120.
Cserveny I., 1.
Cuciureanu Șt., 21, 43.
Curchi I., 12, 23, 35, 44, 58, 81, 84 93, 94, 96, 105, 106, 107, 120, 132, 137.

Dan Tr., 34, 46, 93, 94, 95, 105, 128, 132, 136, 137.
David M., 12, 47, 59, 71.
Dăscălescu Hr., 12, 18, 21, 23, 24, 34, 35, 43, 46, 47, 55, 69, 70, 92, 93, 94, 95, 104, 105, 106, 107, 120, 128, 130, 131, 132, 136, 137.
Deac I., 43.
Demetrescu Gh., 1.
Derenbaum M., 12, 21, 23, 24, 32, 34, 45, 46, 53, 54, 55, 56, 57, 69, 120.
Desargnes, 70.
Descartes, 16.

1) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Diaconescu N., 1.
Dimitrescu Gh. C., 46, 107.
Dimitriu A. I., 1, 9, 18, 43.
Dimitriu Gh. C., 35, 46, 47, 48, 56, 58, 59, 71, 107, 128.
Dini I., 24, 34, 45, 46, 48, 53, 57, 59, 80, 83, 92.
Diofant, 16.
Dordea Tr. A., 17, 42.
Dragalina C., 1.
Dumitrașcu M. R., 71, 72, 82, 93, 94, 95, 104, 105, 106, 107, 127, 128, 130, 132, 137.
Dumitrescu Gh., 1.
Dumitriu-Dada I., 24, 36, 60, 72, 93, 95, 96, 120, 128, 138.
Dumitrescu N. R., 24, 34, 35, 56, 59.
Duțulescu M., 1.

Euclid, 18.
Euler 16, 17, 25, 115, 126.

Favard I., 7.
Felecean S., 59, 82, 94.
Ferenc A., 1.
Feuerbach, 126.
Fibonacci, 17.
Filipovici I., 53, 82.
Fink, 16.
Firoiu I., 12.
Florescu H., 93.
Florescu I. B., 18, 101.
Florescu M., 1.
Focșăneanu M., 18, 79.
Fodorac V., 23, 94.
Fofiu C., 128, 132, 137.
Frățici I., 1.
Freiere L., 126.

Gall T., 71, 80, 82, 83, 92, 93, 94, 95, 104, 105, 106, 107, 137.
Gama S. Sodré, 126.
Gandrabura Al., 48, 80, 82, 92.
Gane V., 1.
Garcia G., 79, 115.
Georgescu D., 1.
Georgescu P., 53.
Gheorghe V., 47, 48, 59, 83, 93.
Gheorghiu A. Ș., 18.
Gheorghiu I. S., 68.
Ghermănescu M., 1, 68, 101.
Ghermani M., 68.
Gheție C., 46.
Ghilezan A., 19, 21, 43, 120.
Ghișoiu P., 11, 12, 18, 19, 43, 44, 55, 70, 116.
Girard, 16.
Gob, 52.
Goldner S., 82, 94, 107.
Grabois J., 126.
Grecu M. C., 69, 116, 117.
Grigorescu D., 137.
Grinberg N. M., 23, 32, 34, 35, 45, 46, 47, 53, 56, 58, 59, 71, 80, 82, 84, 93, 94, 95, 104, 105, 106, 107, 108, 120, 128, 130, 131, 132, 137.
Grossu I. A., 12, 21, 60, 131, 132.
Grünbaum M., 101, 112, 115, 126.
Günter, 16.

Hadamard J., 7.
Hamerak C., 9.
Hangan M., 68.
Harriot, 16.
Hollinger A., 12, 24, 34, 55, 92, 127.
Hristea N., 1.
Hubert N., 1.

Ilie C. I., 82, 83.
Iliescu I. T., 56, 128.
Iliescu M. E., 23, 45, 46, 106, 128, 130.
Ioachim C. Gh., 71.
Ioanin C. G., 35, 45, 47, 58, 59, 80, 82, 84, 92, 93, 94, 95, 105, 107, 127, 128, 130, 132, 137.
Iohab N., 59, 80, 82, 93, 94.
Ionescu-Bujor, 22, 79, 84, 89, 96, 132.
Ionescu D. I., 59, 135.
Ionescu H., 34, 35, 43, 53, 54, 55, 58, 59, 68, 82, 106, 116, 117, 118.
Ionescu Ț. C., 9, 116, 117.
Iorgulescu T., 1.
Iotta D. M., 34, 55, 58.
Iustin N., 9.
Ivănescu C., 59, 60, 72, 80, 82, 83, 84, 92, 93, 94, 95, 96, 104, 105, 106, 107, 108, 120, 127, 128, 130, 132, 136, 137, 138.

Jakab N., 80, 82, 93, 94.
Jeba Ct, 12, 21, 23, 46, 55, 69, 72, 80, 94, 95, 103, 104, 106, 107, 137.
Jecu M., 1.
Jerabek, 126.
Jijie Iv. R., 46.
Jordan, 7.

Karamata I., 7.
Kiepert, 126.

Lagrange, 51.
Laissant C. A., 6, 15.
Lalescu Tr., 3, 15.
Lambrino Gh., 2.
Landmann I., 128.
Laplace, 7.
Lascu C. I., 23, 46, 56, 102.
Lațin V., 2.
Leibnitz, 16.
Lemoin, 126.
Leonardo de Pisa, 17.
Leonida D., 2.
Levi-Civita T., 7.
Lewicky W., 7.
Linteș I., 2.
Linteanu Gh., 2.
Lobonț E., 2.
Lupan A., 2.
Lupescu G. C., 12, 18, 21, 23, 24, 32, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 47, 48, 53, 56, 59, 69, 71, 80, 82, 83, 84, 92, 93, 94, 95, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 120, 127, 128, 130, 132, 137, 138.
Lusin N., 7.

Maevschi I., 59.
Magheru I., 2.
Manasiu D., 48, 59, 82, 104, 106, 128.
Mănescu M., 103.
Mantel P., 101.
Manughevici C., 2.
Marchand A., 7.
† Marcu A., 46, 47, 48, 55, 59, 81, 82, 84, 92, 93.
Mardan D., 2.
Mărgineanu I., 23, 24, 36, 43, 117, 132.
Margulius M., 93, 94, 104, 105, 127 128, 130, 132 137, 138.
Marineanu T., 9, 12, 22, 44, 45, 46, 53, 54, 69, 79, 117, 118, 120.
Marinescu T., 2.
Marșieu T., 12, 21, 23, 32, 34, 35, 36, 43, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 57, 58, 59, 60, 61, 69, 71, 72, 73, 78, 81, 82, 84, 92, 94, 95, 101, 103, 104, 105, 106, 107, 109, 116, 120, 128, 130, 132, 136, 137.
Mateescu Șt., 2, 7.
Mecu I. I., 47, 53.
Mecu M., 128, 138.
Mehedinți D., 35, 46, 47, 59, 80, 82, 83, 93, 94, 104, 120.
Menelaas, 78.
Mereuță C., 56.
Mereuță E., 11, 12, 21, 22, 23, 34, 36, 43, 45, 46, 47, 48, 53, 56, 58, 59, 69, 71, 83, 84, 92, 93, 94, 95, 100, 103, 104, 106, 108, 120, 127, 128, 130, 131, 132, 137, 138.
Micșunescu M., 46.
Mihai E., 2.
Mihăileanu N., 12, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 68, 69, 71, 80, 82, 83, 84, 90, 92, 93, 94, 95, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 116, 117, 118, 120, 127, 128, 130, 132, 137, 138.
Mihalcea E., 9.
Mihaly E., 2.
Millea E., 35, 45, 46, 47, 48, 53, 59, 69, 83.
Milloux H., 7.
Miloia I., 2.
Mioc V., 2.
Mircea A. I., 56.
Moisil Gr. C., 68, 101.
Moivre 61, 73, 115, 123.
Motoc D. M., 18, 23, 34, 45, 46, 47, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 69, 80, 83, 92, 93, 94, 103, 104, 105, 106, 118, 120, 128, 130, 136, 137, 138.
Murăroiu I., 11, 19, 116.
Musta Șt., 42, 50.

Nadașan Șt. 2.
Nagler M., 47, 48, 56, 58, 59, 93, 104, 107, 128, 137.
Naneș Gh., 2.
Necu I. I., 35.
Negrea A. M., 12, 22, 23, 24, 33, 34, 35, 43, 53, 55, 56, 58, 59, 71, 80, 82, 83, 84, 92, 93, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 108, 116, 127, 128, 130, 132, 137.
Negrescu Tr., 68.
Nestor D., 8.
Neufeld P., 92, 94, 95, 104, 105.
Neuländer A., 59, 83, 94.
Newton, 16, 19.
Nichifor Gh., 2.
Nicolaescu Șt., 23, 35, 46, 47, 58, 59, 69, 83, 94, 95, 104, 106, 107, 120.
Nicolau A., 2.
Nicolau P., 2.

Niculescu Al., 15, 29, 50, 79.
Niculescu C., 2.
Niculescu Gh., 31, 101.
Niculescu M., 42, 43.
Niewenglowski, 99.
Nikodym O., 101.
Noaghea Gh., 2.
Novacu V., 8.
Novais O., 126.

Ocagne M., 68, 135.
Oncica I., 2.
Onicescu O., 2.
Oprea B., 24, 83, 93.
Orăşeanu C., 2.
Orăşeanu G., 2.
Otopeanu C., 2.
Oughtred, 16.

Paccioli, 15.
Pantazi A., 101.
Pappus, 29, 79.
Parepeanu C. I., 12, 22, 23, 24, 32, 33, 35, 44, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 69, 71, 80, 83, 84, 92, 93, 94, 103, 105, 120, 127, 128, 130, 132, 137, 138.
Pascaru L. I., 23, 32, 35, 46, 56, 58, 59, 71, 93, 94.
Pănoiu I. E., 23, 35, 45, 47, 55, 58, 59, 71, 80, 83, 84, 92, 93, 94, 95, 96, 105, 108.
Păsculescu V., 48, 53, 54 55, 56, 58, 59, 71, 80, 83, 91, 92, 93, 94, 95, 105, 106, 107, 108, 120, 128, 130, 132, 137.
Pătrnescu N., 48, 52, 59, 83, 94.
Peanno 17.
Pell I., 16.
Petralia St., 68.
Petrescu A., 2.
Petrică I. I., 128, 137.
Petricoane D. M., 2.
Petrovici D., 9.
Petrovitch M., 7.
Picard E., 7.
Pillado S. I., 42.
Pisai I. Gh., 32, 46, 53, 54.
Pitagora, 34, 118.
Polya, 14.
Pompeiu D., 7, 42, 68 135.
Pop G., 59.
Pop I. L., 12, 33, 70, 81, 82, 92, 106, 107, 108, 128, 130, 132, 137, 138.
Pop S., 35.
Popa E., 59, 94.
Popa B. I., 12, 17, 21, 22, 23, 24, 34, 35, 36, 43, 44, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 80, 83, 84, 92, 93, 94, 95, 101, 105, 107, 117, 118, 137, 138.
Popa N., 48, 58, 59, 71, 83, 84, 92.
Popescu C. Şt., 23, 48, 56, 59, 80, 82, 94, 95, 103, 104, 105.
Popescu D., 8.
Popescu E., 2.
Popescu I., 2.
Popescu I. Al., 128, 137.
Popescu I. I., 83.
Popoe Gh. I., 32.
Popovici T., 68.
Popovici Tib., 7, 101.
Popp I., 31.
Porumbescu D., 93, 94, 128, 137.
Predoescu M., 130, 137.
Predoiu Fl. 137, 138.
Presbitereanu M., 120.
Protopopescu I., 2, 116.
Puperzescu I. G., 12, 19, 21, 24, 32, 53, 54, 92.
Purcariu I, 2.
Purcel At., 128, 130, 132 137, 138.
Purdilă A., 12, 19, 22, 23, 24, 32, 33, 34, 35, 44, 45, 47, 51, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 69, 80, 82, 83, 84, 92, 93, 94, 95, 102, 104, 105, 106, 107, 108, 120, 127.
Puşcaru Z. I., 92.

Racliş N. R., 2.
Ragolschi E., 32.
Rahn, 16.
Rădulet R., 101.
Rău Al.. 101.
Retico, 16.
Ricci G., 31.
Riemann, 101.
Roibănescu C.. 2.
Roşca V. 137.
Rosenblatt A., 79, 115.
Roth M., 59, 83, 94.
Rudolf C. R., 16.
Russu D. C., 12, 19, 21, 22, 23, 24, 32, 33, 35, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 69, 71, 80, 83, 84, 92, 93, 94, 102, 104, 105, 106, 107, 108, 117, 120, 127, 128, 130, 132, 138.
Rusu L., 44.
Rusu S., 19.

Saegiu E., 2.
Sallovitz A., 7.
Sandor A., 2.
Sanciuc L., 2.
Şaur I., 43.
Savin C. I., 12, 21, 36, 43, 45, 53, 105.
Savovici F., 59, 93, 94, 103, 104, 106,
Sâmbotin Gh., 35, 46, 47, 53, 58, 59, 69, 71, 83.
Schileru I. C., 2, 7, 60.
Schooten, 16.
Schuler D., 117.
Selzer A, 115.
Şerban A. T., 23, 47, 58, 59, 72, 92, 137.
Şerbănescu, 2.
Serebrenic S., 126.
Sergescu P., 2, 7, 126.
Severineanu C., 2.
Sierpinschi W., 7.
Simionescu G. C., 46.
Simniceanu S., 2.
Simson, 7, 135.
Smărândoiu N., 69, 120.
Smighelschi O., 2.
Souza I., 126.
Sparu E., 7.
Spineanu C., 2.
Stambuleanu A., 2.
Stan A. I., 12, 24, 48. 60, 69, 72, 83, 94, 96, 105, 106, 108.
Stan I., 82, 104, 128, 130.
Stăncescu C., 2.
Stăncescu B., 93, 128, 137.
Stantzel E., 2.
Stefănescu A, 46, 59, 82, 128.
Stefănescu B. D., 128.
Stefănescu G., 94, 127.
Stefănescu O., 2.
Steiner, 126.
Stewart, 6, 15, 50, 54.
Stewin, 16.
Stoica A. N., 8.
Stoicescu E., 12, 23, 34, 35, 46, 47, 48, 53, 55, 56, 83, 84, 120, 127, 137.
Stoicescu L., 2, 23.
Stoicescu M., 2.
Sturm, 42.
Sultă A. P., 34, 36, 46, 53.
Szegő. 14.

Tartaglia, 15, 16.
Tăutu Şt., 59, 83, 84, 92.
Tavares P., 126.
Taylor, 7.
Teodorescu C., 2, 3, 7, 13, 25, 37, 49 61, 73, 85, 110, 123.
Teodorescu N., 7, 101.
Teodorescu St., 19, 47.
Teodosiu A., 2.
Thébault V., 7, 18, 42, 79, 101, 135.
Therrin G., 2.
Tica P. M., 127, 128, 130, 137.
Ţino Ov., 2, 12.
Ţiţeica G, 7.
Ţiucra M., 12, 22, 23, 24, 33, 35, 45, 46.
Tofin C., 34.
Toporescu R., 68.
Triscă I. 137, 138.
Tschlek I., 7.

Valeriu Gh., 48.
Valiron G., 7.
Vandermonde, 40, 41, 81.
Varopoulos Th., 101.
Vasiliu Gh., 2.
Vasiliu M., 2.
Vasu V., 19, 102.
Vâlceanu N. I., 9, 11, 43, 60, 116, 117, 118, 131.
Vâlcovici V., 2.
Velicescu Gh. T., 19, 21, 102, 120.
Velicescu N. N., 21, 102.
Viete, 16.
Vlad I. V., 2.
Voineagu Gh. R., 93.
Vonica I., 12, 32, 33, 46, 54, 83, 84, 92, 94, 96, 108.

Wallis, 16.
Wargny C., 15.
Weiss A. E., 101.
Weissmann M., 12, 23, 32, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 48, 53, 57, 58, 59, 83, 84, 92, 93, 94, 104, 106, 107, 120, 128, 138.
Weyl, 101.
Widmann, 42.

Zaharia R. O., 18.
Zamfirescu Gh., 48, 59, 82, 83, 138.
Zapan G., 48, 59, 82, 83.
Zapan G., 2, 90.
Zăgănescu I., 2.

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Salta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadena (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. José (Uruguay), *B. Jekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul XI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Rugăm pe corespondenții noștri, a ne trimete din timp abonamentul pe anul XII, care începe la 15 Martie 1932. Prețul abonamentului este de 100 (una sută) lei.

5 lei